Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. október 24.
Kurzus: 22

8. gyakorlat
Inverz, rang

1. Létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. A t paraméter mely értékeire van az alábbi mátrixoknak inverze?

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ -3 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

3. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Legyen A és B két $n \times n$-es mátrix. Tudjuk, hogy A invertálható és $AB = 0$. Következik-e ebből, hogy $B = 0$?

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor AB-nek is.
   b) Ha AB-nek létezik inverze, akkor A-nak és B-nek is.
   c) Ha $A+B$-nek és $A-B$-nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$-nek is.
   d) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor $A+B$-nek is.

6. Mennyi az 1. feladatban szereplő mátrixok rangja?

7. Hogyan függ a 2. feladat mátrixainak rangja a t paraméter értékétől?

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Határozza meg az AA^T és az A^TA mátrixok rangját!

9. Legyen A egy olyan $n \times n$ mátrix, melyre $A^2 = 0$. Lehet-e A rangja n?

10. Igazolja, hogy $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

11. Legyen A és B két $n \times n$ mátrix. Tudjuk, hogy $r(A) = n$. Következik-e ebből, hogy $r(AB) = r(B)$?

12. Legyen A egy 6×5 valós mátrix. Melyik igazak az alábbi állítások közül?
a) Ha A első három sora lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldeterminánsa 0.
b) Ha a bal felső 3×3-as aldeterminánsa 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.
c) Ha az első két oszlopa lineárisan összefüggő és az utolsó két oszlopa is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.
d) Ha az első három oszlopa lineárisan összefüggő és az utolsó három oszlopa is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.

13. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

    a) Egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb eggyel változik.

    b) Bármelyik mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik.

    c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

    d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

14. Tudjuk, hogy az $n \times n$-es A mátrixra $A^2 + A + E = 0$. Igazolja, hogy A invertálható és határozza meg az A^{99} mátrixot!

15. Melyek igazak az alábbiak közül?

    a) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek.

    b) Ha az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

    c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

    d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

    e) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az A oszlopai lineárisan függetlenek.