

7. gyakorlat  
Mátrixok

1. A térben egy síkba esnek-e az  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(4; -2; -1)$ ,  $C(-6; -11; 2)$  és  $D(10; 15; 3)$  pontok?
2. Számítsa ki
  - a) a  $v = (2, 1, -3)$  és a  $w = (1, 1, 3)$  vektorok által meghatározott paralelogramma területét!
  - b) az  $A = (7, 3, 4)$ ,  $B = (1, 0, 6)$ ,  $C = (4, 5, -2)$  csúcsú háromszög területét!
3. Legyen egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(1, -1, 4)$ ,  $C(1, 0, 5)$ . Mekkora a paralelepipedon térfogata?
4. Vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel azok az  $n \times n$ -es  $A$  mátrixok, melyekre
  - a)  $A = A^T$  ?
  - b)  $\det A = 1$  ?
  - c)  $\det A = 0$  ?
  - d)  $AB = BA$  valamely rögzített  $n \times n$ -es  $B$  mátrixra?
5. Legyen  $A$  és  $B$  olyan  $n \times n$ -es mátrix, hogy a főátlón kívüli elemek mind 0-k, a főátlóban pedig  $A$ -ban az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  számok,  $B$ -ben pedig a  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  számok állnak. Mi lesz az  $AB$  és a  $BA$  szorzat?
6. Legyen  $A$  olyan  $n \times n$ -es mátrix, melyre  $A = A^T$  és  $A^2$  főátlójában csak nullák állnak. Igazolja, hogy  $A$  a nulla mátrix (minden eleme 0)!
7. Legyen  $A$  egy olyan mátrix, amelyben minden sorban és minden oszlopban az elemek összege 0,  $B$  pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az  $AB$ , illetve a  $BA$  szorzat, ha a szorzás elvégezhető?
8. A  $100 \times 100$ -as  $A$  mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A  $100 \times 100$ -as  $B$  mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Mi lehet az  $AB$  szorzat?

9. A  $100 \times 100$ -as  $A$  mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1 áll, az összes többi eleme 0. Határozza meg az  $A^{100}$  mátrixot!
10. Igaz-e, hogy
- a) ha az  $A$  mátrixhoz van olyan  $j \geq 1$  egész szám, hogy  $A^j = 0$ , akkor  $\det A = 0$  ?
  - b) ha  $\det A = 0$ , akkor van olyan  $j \geq 1$  egész szám, hogy  $A^j = 0$  ?
11. Mely racionális számokból álló  $A$  mátrixokra teljesül, hogy  $A^{1000} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  ?
12. Határozza meg az összes olyan  $Y$  mátrixot, amelyre  $YA = B$  teljesül, ha
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
13. Az  $n \times n$ -es  $A$  és  $B$  mátrixokra  $AB = A$  és  $BA = B$ . Bizonyítsa be, hogy ekkor  $A^2 = A$  és  $B^2 = B$ .