

6. gyakorlat  
Determinánsok, mátrixok

1. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Hogyan változik egy  $n \times n$ -es mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?
3. Egy  $n \times n$ -es  $D$  determináns minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal. Mi lesz az így kapott  $n^2$  darab szorzat összege?
4. Legyen  $v = (1, 2, 3)$ ,  $w = (2, -1, 3)$  és  $u = (-1, 2, -3)$ . Mi lesz a  $v \cdot w$ ,  $w \cdot u$ ,  $u \cdot v$  skaláris szorzatok, a  $v \times w$ ,  $w \times u$ ,  $u \times v$  vektoriális szorzatok, illetve a  $(v, w, u)$  vegyesszorzat értéke?
5. Mi lehet az az  $u = (4, y, z)$  vektor, amelyik merőleges a  $v = (-1, 4, 2)$  és a  $w = (3, -3, -1)$  vektorokra is?
6. Legyen  $A = (2, 1, 4)$ ,  $B = (1, 1, 6)$ ,  $C = (3, 0, 1)$ ,  $D = (0, 1, 1)$ ,  $E = (7, 1, 3)$ . Határozza meg az  $A$ ,  $B$  és  $C$ , illetve a  $C$ ,  $D$  és  $E$  pontok által meghatározott síkok metszésvonalának irányvektorát!
7. Az alábbi mátrixoknál minden olyan párra, aminél értelme van állapítsa meg a két mátrix összegét, illetve szorzatát!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Az előző feladatbeli mátrixokra határozza meg  $\det(B^T B)$ ,  $\det(BB^T)$ ,  $\det(C^T C)$  és  $\det(CC^T)$  értékét!

9. Számolja ki az alábbi mátrixokat!

a)  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$     b)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$     d)  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n$

10. Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az  $X^2 = -E$  egyenlet?

11. Hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned}x + z + w &= 4 \\2x + y - w &= 2 \\3x + y + z &= 7\end{aligned}$$

12. Milyen  $s$  és  $t$  értékekre lesz a következő egyenletrendszer megoldása egyértelmű?

$$\begin{aligned}sx + tz &= 2 \\sx + sy + 4z &= 4 \\sy + 2z &= t\end{aligned}$$

13. Állapítsa meg, hogy az  $A$  mátrix oszlopainak lineáris kombinációjaként előáll-e a  $b$  vektor!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Mennyi annak az  $n \times n$ -es  $A$  mátrixnak a determinánsa, melyben az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |i - j| = 1 \\ 0, & \text{ha } |i - j| \neq 1 \end{cases}$

15. Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$ . Határozza meg  $\det(A)$  értékét!