Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. október 3.
Kurzus: 22

5. gyakorlat
Determinánsok

1. Mennyi az $1, 2, \ldots, n$ elemek alábbi permutációinak inverziószáma?

   a) $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 9 \quad (n = 9)$ b) $1, 3, 5, 7, 9, 10, 8, 6, 4, 2 \quad (n = 10)$
   c) $21, 22, \ldots, 29, 30, 11, 12, \ldots, 19, 20, 1, 2, \ldots, 10 \quad (n = 30)$
   d) $n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1$ e) $100, 101, 98, 99, 96, 97, \ldots, 2, 3, 1 \quad (n = 101)$

2. Az $1, 2, \ldots, 100$ számok egy tetszőleges $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(100))$ permutációjából készítsük el azt a σ' permutációt, melyben $\sigma'(i) = \sigma(i+1)$, ha $1 \leq i \leq 99$ és $\sigma'(100) = \sigma(1)$. Igazolja, hogy $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ paritása különbözik!

3. Az alábbi "determinánsban" mi lesz a megadott szorzatok előjele?

   a) $BUDA$ b) $PEST$ c) $JETI$ d) $BUSZ$

$$\begin{vmatrix} P & K & B & J \\ U & V & E & R \\ I & D & N & S \\ Z & T & M & A \end{vmatrix}$$

4. A definíció alapján számolja ki az alábbi determinánsokat!

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 10 & 3 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

5. Mennyi az alábbi mátrixok determinánsa?

$$\begin{pmatrix} 123456 & 123458 \\ 123457 & 123459 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{pmatrix}$$

6. Számolja ki az alábbi determinánsokat!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

7. A 9×9 méretű A mátrix determinánsa nem 0. Legyen B az a mátrix amit A-ból az első sor λ-val való szorzásakor kapunk. Tegyük fel, hogy $\det(B) = \det(\lambda A)$. Mi lehet λ értéke?

8. Igaz-e hogy

   a) ha egy $n \times n$ méretű mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a determinánsa is 0?

   b) ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban van 0 elem?

   c) ha egy $n \times n$ méretű mátrixban van egy $k \times \ell$ méretű csupa 0-ból álló téglalap és $k + \ell > n$, akkor a determináns 0?

9. Számolja ki az alábbi determinánsokat!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 1 & 6 & 9 & 12 & \dots & 3n \\ 1 & 8 & 12 & 16 & \dots & 4n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2n & 3n & 4n & \dots & n^2 \end{vmatrix} =? \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =?$$

10. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen B az az n-szer n-es mátrix, melyben a k-adik sor j-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ $(1 \le k, j \le n)$. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1?

11. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Mennyi a determinánsa, ha

    a) $a_{kj} = k + j$?

    b) $a_{jj} = 1$, $a_{j,j+1} = 1$, $a_{n,1} = 1$, a többi elem 0 ?

    c) $a_{kj} = \min(k, j)$?

    d) $a_{jj} = j$ és $a_{k,j} = 1$ ha $k \neq j$?

12. Bizonyítsa be, hogy ha az $n \times n$ méretű A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor $\det A$ osztható 2^{n-1}-gyel!

13. A determináns értékének kiszámítása nélkül igazolja, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$