

4. gyakorlat
Egyenletrendszer, Gauss-elimináció

1. Oldja meg a valós az alábbi egyenletrendszereket a Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{array}{l} \text{a) } -x + 3y + 3z = 2 \\ \quad 3x + y + z = 4 \\ \quad 2x - 2y + 3z = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x + 3y + z = 11 \\ \quad x - y - 2z = -7 \\ \quad 3x + 2y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } 2x + 3y + z = 11 \\ \quad x - y - 2z = -7 \\ \quad 3x + 2y - z = 4 \end{array}$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{l} \text{a) } 2x + 4y + 6z = 8 \\ \quad x + 2y + 5z = 1 \\ \quad x + 4y + 7z = 2 \\ \quad 4x - 5y + 2z = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x - y + 3z + 5u = 0 \\ \quad -4x + 2y + 5z + 3u = 0 \\ \quad \quad \quad z + 7u = 0 \end{array}$$

3. Adjon példát olyan 3 ismeretlenes 5 egyenletből álló rendszerre, melynek

- a) nincs megoldása;
- b) egyértelmű a megoldása;
- c) végtelen sok megoldása van!

4. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{l} \text{a) } x + 9y + 2z - 5u - 3v = 9 \\ \quad \quad \quad 2y + 3u = 5 \\ \quad -2x - 4z + u + 6v = 3 \\ \quad 3x + 5y + 6z + 6u - 9v = 8 \\ \quad \quad \quad 8y - 6u = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x - y + 3z = 3 \\ \quad 3x + y - 5z = 0 \\ \quad 4x - y + z = 3 \end{array}$$

5. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.
- b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

6. Adja meg a t paraméter értékétől függően az alábbi egyenletrendszerek megoldását!

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{l} x + 3y - z = 2 \\ 2x - 2y + 6z = 12 \\ -3x - y + t \cdot z = 3 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x + y + t \cdot z = 6 \\ 2x + y + (t + 1) \cdot z = 10 \\ 3x - 2y + (t - 1) \cdot z = 8 \\ 7x - 12y - 5z = 4 \end{array} \end{array}$$

7. A $P(1, -2, 5)$ és a $Q(7, 6, 1)$ pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a P és a Q felezősíkját). Határozza meg ennek a síknak az egyenletét!

8. Adja meg a p paraméter összes értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot!

9. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

10. Oldja meg az alábbi n ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_n + x_1 = 1 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = n - 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = n - 2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{array} \end{array}$$

11. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de egyébként minden egyenletben a változók együtthatói ugyanazok maradnak)

- előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek nincs megoldása;
- előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van?

4. gyakorlat
Egyenletrendszer, Gauss-elimináció

1. Oldja meg a valós az alábbi egyenletrendszereket a Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{array}{l} \text{a) } -x + 3y + 3z = 2 \\ \quad 3x + y + z = 4 \\ \quad 2x - 2y + 3z = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x + 3y + z = 11 \\ \quad x - y - 2z = -7 \\ \quad 3x + 2y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } 2x + 3y + z = 11 \\ \quad x - y - 2z = -7 \\ \quad 3x + 2y - z = 4 \end{array}$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{l} \text{a) } 2x + 4y + 6z = 8 \\ \quad x + 2y + 5z = 1 \\ \quad x + 4y + 7z = 2 \\ \quad 4x - 5y + 2z = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x - y + 3z + 5u = 0 \\ \quad -4x + 2y + 5z + 3u = 0 \\ \quad \quad \quad z + 7u = 0 \end{array}$$

3. Adjon példát olyan 3 ismeretlenes 5 egyenletből álló rendszerre, melynek

- a) nincs megoldása;
- b) egyértelmű a megoldása;
- c) végtelen sok megoldása van!

4. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{l} \text{a) } x + 9y + 2z - 5u - 3v = 9 \\ \quad \quad \quad 2y + 3u = 5 \\ \quad -2x - 4z + u + 6v = 3 \\ \quad 3x + 5y + 6z + 6u - 9v = 8 \\ \quad \quad \quad 8y - 6u = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } 2x - y + 3z = 3 \\ \quad 3x + y - 5z = 0 \\ \quad 4x - y + z = 3 \end{array}$$

5. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.
- b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

6. Adja meg a t paraméter értékétől függően az alábbi egyenletrendszerek megoldását!

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{l} x + 3y - z = 2 \\ 2x - 2y + 6z = 12 \\ -3x - y + t \cdot z = 3 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x + y + t \cdot z = 6 \\ 2x + y + (t + 1) \cdot z = 10 \\ 3x - 2y + (t - 1) \cdot z = 8 \\ 7x - 12y - 5z = 4 \end{array} \end{array}$$

7. A $P(1, -2, 5)$ és a $Q(7, 6, 1)$ pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a P és a Q felezősíkját). Határozza meg ennek a síknak az egyenletét!

8. Adja meg a p paraméter összes értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot!

9. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

10. Oldja meg az alábbi n ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_n + x_1 = 1 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = n - 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = n - 2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{array} \end{array}$$

11. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de egyébként minden egyenletben a változók együtthatói ugyanazok maradnak)

- előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek nincs megoldása;
- előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van?