

3. gyakorlat
Vektortér, lineáris függetlenség, bázis

1. A $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ halmazon legyen az összeadás a szokásos, a skalárral szorzás pedig $\lambda \odot (a, b) = (\lambda b, \lambda a)$. Vektorteret kapunk-e így?
2. A $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ halmazon legyen a skalárral szorzás a szokásos, az összeadás pedig $(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 + 1, b_1 + b_2 + 1)$. Vektorteret kapunk-e így?

3. Legyen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lineárisan függetlenek-e, illetve $\mathbb{R}^3$ -ben bázist alkotnak-e az alábbi vektorrendszerek?

- | | | |
|---------------------|------------------|------------------|
| a) $\{u, v, w, a\}$ | b) $\{u, v, w\}$ | c) $\{u, v, a\}$ |
| d) $\{u, v\}$ | e) $\{u, w, a\}$ | |
4. Egészítse ki az $(1, 1, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0, 2), (3, 5, 3, 5, 3), (0, 1, 0, -1, 0)$ vektorrendszert $\mathbb{R}^5$ egy bázisává, ha lehetséges!
 5. Adja meg $\mathbb{R}^3$ -ben annak az altérnek egy bázisát, amelyben a vektorok koordinátáira teljesül a $2x + 3y + 4z = 0$ egyenlet.
 6. Ha a V vektortérben
 - a) az u, v, w vektorok lineárisan függetlenek, akkor lineárisan függetlenek-e az $u + v, v + w, w + u$ vektorok?
 - b) az $u + v, v + w, w + u$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor lineárisan függetlenek-e az u, v, w vektorok?

7. Legyenek az $u_1, u_2, \dots, u_k$ vektorok lineárisan függetlenek a V vektortérben és $w = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$. Mikor lesz $w, u_2, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer?
8. Legyenek az u és v vektorok lineárisan független elemei a V vektortérnek. Mely esetekben lesznek az $\alpha u + \beta v$ és a $\gamma u + \delta v$ vektorok lineárisan függetlenek?
9. Tudjuk, hogy az $u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy az u, v, w vektorok is azok?
10. Igaz-e, hogy egy V vektortérben
 - a) ha $\{u_1, \dots, u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, \dots, v_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, \dots, u_{100}, v_1, \dots, v_{100}\}$ is lineárisan független?
 - b) ha $\{u_1, \dots, u_{100}, v_1, \dots, v_{100}\}$ lineárisan független, akkor külön $\{u_1, \dots, u_{100}\}$ és $\{v_1, \dots, v_{100}\}$ is lineárisan független?
 - c) ha $\{u_1, \dots, u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, \dots, v_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{u_1 + v_1, \dots, u_{100} + v_{100}\}$ is lineárisan független?
 - d) ha $u_1, \dots, u_{100}$ közül bármelyik 99 vektor lineárisan független, akkor $\{u_1, \dots, u_{100}\}$ is lineárisan független?
11. Bizonyítsa be, hogy ha egy V vektortérben az $u_1, u_2, \dots, u_k$ vektorok lineárisan függetlenek és a $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ vektorok egy generátorrendszert alkotnak, akkor vagy az u_i vektorok vagy a v_i vektorok bázist alkotnak V -ben!
12. A V vektortérben az $u_1, u_2, \dots, u_k$ lineárisan független vektorok az U alteret generálják, a $w_1, w_2, \dots, w_\ell$ lineárisan független vektorok pedig a W alteret. Igazolja, hogy ha az U és a W alterek metszete csak a nullvektorból áll, akkor ez a $k + \ell$ vektor együtt is lineárisan független!
13. Bizonyítsa be, hogy egy 99 dimenziós vektortérben két 50 dimenziós altérnek mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!