Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. szeptember 12.
Kurzus: 22

2. gyakorlat
Vektortér

1. A valós számhármasok terében alteret alkotnak-e azok az (x, y, z) hármasok, melyekre

   a) $3x + 2y - 4z = 0$?   b) $3x + 2y - 4z = 10$?

   c) $y = 2011$?   d) $x + y \geq 0$?

2. Vektorteret alkotnak-e azok a valós számokon értelmezett valós értékű f függvények, melyekre

   a) $f(3) = 0$?   b) $f(3) = 5$?

   c) $f(3) \leq 0$?   d) $f(3) = 2f(6)$?

   e) $f(3) = f(6) + 5$?   f) $f(3) = f(6)^2$?

3. Alteret alkotnak-e a valós együtthatós polinomok vektorterében az alábbi részhalmazok?

   a) A pontosan 100 fokú polinomok.

   b) A legfeljebb 100 fokú polinomok.

   c) A legalább 100 fokú polinomok.

4. Legyen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Igaz-e, hogy

   a) az a vektor az u, v és w lineáris kombinációja?

   b) $\{u, v, w\}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek?

   c) $\{u, v, a\}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek?

   d) az $\{u, v, a\}$ vektorok lineáris kombinációi $\mathbb{R}^3$ egy alterét adják?

5. Legyen V egy vektortér és $W \leq V$ egy altere. Az $u, v, w \in V$ vektorokra teljesül, hogy $u + v \in W$, $2u + w \in W$, $u + v + w \notin W$. Az alábbi vektorok közül melyik W-beli és melyik nem?

   a) $2u + 2v$

   b) $u - v + w$

   c) $2u + 2w$

   d) $0,73w$

   e) $6u + 2v + 1,5w$

6. Legyen V egy vektortér, $a, b, c, d \in V$ és $a + b + c + d = 0$. Következik-e ebből, hogy

   a) $\langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle$?

   b) $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$?

   c) $\langle a, b, c \rangle = \langle a, c, d \rangle$?

   d) $\langle a, b, c \rangle = \langle a, d \rangle$?

7. Döntse el, hogy az alábbiakban adott V alaphalmaz a $\oplus$-vel jelölt vektorösszeadással és a $\odot$-vel jelölt skalárral való szorzással vektorteret alkot-e!

   a) V az egész számok halmaza; $\oplus$ az egészek összeadása; $\lambda \odot v = v$ minden λ skalár és $v \in V$ esetén.

   b) V a racionális számok halmaza; $\oplus$ a racionális számok összeadása; $\lambda \odot v = [\lambda \cdot v]$, ahol [ ] egészrészt jelöl.

   c) V a pozitív valós számok halmaza; $u \oplus v = u \cdot v$ (azaz a $\oplus$ a pozitív valós számok szorzása); $\lambda \odot v = v^\lambda$.

8. Igazolja, hogy egy vektortérben $\lambda v = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha vagy $\lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$.

9. Adjon meg olyan összeadást és skalárral való szorzást, amellyel egy adott $ax + by = c \neq 0$ egyenletű, síkbeli, az origón át nem menő egyenes pontjai vektorteret alkotnak!

10. Bizonyítsa be, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából!