

13. gyakorlat  
Számosságok

1. Határozzuk meg az alábbi halmazok számosságát:
  - a) a hárommal osztható egész számok halmaza;
  - b) a sík azon pontjainak a halmaza, melyeknek mindkét koordinátája egész;
  - c) a tér azon pontjainak a halmaza, melyeknek mindhárom koordinátája racionális;
  - d) a sík összes pontjainak a halmaza;
  - e) a tér összes pontjainak a halmaza;
  - f) az  $5 \times 5$  méretű, egészekből álló mátrixok halmaza;
  - g) az egészekből álló négyzetes mátrixok halmaza;
  - h) az egész együtthatós polinomok halmaza;
  - i) a valós együtthatós polinomok halmaza.
  - j) a véges hosszú 0-1 sorozatok halmaza;
  - k) az olyan  $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$  sorozatok halmaza, melyekben a szomszédos elemek hányadosa 2 vagy  $1/2$ ;
  - l) a természetes számok részhalmazainak halmaza;
  - m) a természetes számok véges részhalmazainak halmaza;
  - n) a 256 féle karakterből készíthető, 100 hosszú karaktorsorozatok halmaza;
  - o) a magyar nyelven írt szövegek halmaza;
2. Adjon meg egy bijekciót (kölsönösen egyértelmű leképezést) az alábbi halmazok között!
  - a)  $[0, 1]$  és  $[0, 1)$
  - b)  $[0, 1]$  és  $(0, 1)$
  - c)  $(0, \infty)$  és  $(-\infty, \infty)$
  - d)  $(0, 1)$  és  $(-\infty, \infty)$

3. Hány olyan  $(x, y)$  pontpár van a síkon, melyre
- $x$  és  $y$  racionális
  - $x$  és  $x + y$  racionális
  - $x$  és  $xy$  racionális
  - $x + y$  és  $xy$  racionális
4. Mi az olyan  $z$  komplex számok halmazának számossága, melyekre
- $z \cdot \bar{z}$  egész szám
  - $|z| = 1$
5. Legalább milyen sok egyenesre van szükség ahhoz, hogy lefedhessük velük a síkot?
6. Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú. Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
7. Az  $x$  valós számot hívjuk kiszámíthatónak, ha teljesül a következő: van olyan program, amely ha az  $n > 0$  számot kapja bemenetként, akkor kiírja  $x$ -nek az  $n$ -edik tizedesjegyét. Igazolja, hogy van nem kiszámítható szám.
8. Egy tengeralattjáró egy egész koordinátájú pontból indulva egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, aminek során percenként felbukkan, mindig egy egész koordinátájú pontban. A rá vadászók percenként egyet lőhetnek. Kérdés, hogy meg lehet-e adni lövéseknek egy olyan sorozatát, mellyel akkor is biztosan eltaláljuk a tengeralattjárót, ha annak sem a kiindulási pontja sem a mozgásának iránya nem ismert.