Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. november 21.
Kurzus: 22

12. gyakorlat
Leszámlálások

1. a) Hányféleképpen állítható sorba n ember?
b) Hányféleképpen ültethető le egy kerek asztal köré n ember?
c) Hogyan változik az a) feladat eredménye, ha csak a keresztnevek számítanak és van közöttük 5 István, 3 Ildikó, 4 Károly, a többi név egyedi?

2. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek növekvő sorrendben követik egymást és
a) a szám csupa különböző számjegyből áll?
b) a szám számjegyei között azonosak is lehetnek?

3. Hányféleképpen választhatunk ki három egész számot 1 és n között úgy, hogy az összegük páros legyen, ha
   a) különbözők kell legyenek?
   b) lehetnek közöttük azonosak is?

4. Három barát beül sörözni egy helyre, ahol 7 féle sört csapolnak. Mindegyikük egy korsóval rendel. Hányféleképpen alakulhat a pincér tálcáján lévő sörök összetétele, ha rendelhetnek ugyanolyan sört is?

5. Egy 20 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ.
a) Hányéleképpen tehetik ezt meg?
b) Hányféleképpen tehetik meg akkor, ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyan tisztséget adni?

6. Hány különböző $m \times n$-es 0-1 mátrix van?

7. Hány különböző részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

8. Igazolja, hogy
   a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

   b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} =?$

   c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

9. Igazolja, hogy

   a) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k)$

   b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

10. Egy buszon harmincan utaznak, amikor a végállomásig már csak 5 megálló van hátra. Ha a hátralevő út alatt már senki sem száll fel, akkor hányféle eloszlása lehet az egyes megállókban leszállók számának? És ha tudjuk, hogy minden megállóban legalább egy ember leszáll?

11. Öt házaspár együtt 10 egymás melletti helyre vett jegyet a moziba. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?

12. Hányféleképpen lehet n fiút és n lányt sorbaállítani úgy, hogy felváltva egy fiú és egy lány következzen?

13. Hányféleképpen lehet az origóból a $(3, 2, 4)$ pontba eljutni, úgy, hogy lépésenként egységnyit mehetünk valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosan a pont irányába?

14. A számegyenesen az origóból indulva lépésenként egységnyit mehetünk jobbra vagy balra. Hányféleképpen juthatunk így n lépésben a p pontba?

15. Az n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazai közül hányféleképpen választhatunk ki

    a) 5 különböző halmazt?

    b) 5 olyan halmazt, hogy mindegyik tartalmazza az x elemet.

    c) 5 olyan halmazt, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös eleme?