Bevezetés a Számításelméletbe I. 2011. november 14.
Kurzus: 22

11. gyakorlat
Sajátérték, sajátvektor, komplex számok

1. Határozza meg $\mathbb{R}^2$ alábbi lineáris transzormációinak valós sajátértékeit, sajátvektorait!
   a) origóból való kétszere nagyítás;
   b) origó körüli $+90°$-os forgatás;
   c) az azonosan 0 leképezés;
   d) $x = y$ egyenesre való vetítés.

2. Számolja ki az alábbi mátrixok összes valós sajátértékét! Mindegyik esetben határozza meg a sajátértékhez tartozó sajátvektorokat is! Mik lesznek a sajátalterek?

   a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Mely valós p értékekre, lesz a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & -3 \end{pmatrix}$ mátrixnak két különböző valós sajátértéke? Határozza meg a sajátértékeket és sajátvektorokat $p = 6$ esetben!

4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha v sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, akkor v sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek.
   b) Ha v sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek, akkor v sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.
   c) Ha 0 sajátértéke $\mathcal{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathcal{A}$-nak is.
   d) Ha $\mathcal{A}^2$ az azonosan 0 transzformáció, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 az egyetlen sajátértéke.
   e) Ha $\mathcal{A}$-nak a 0 az egyetlen sajátértéke, akkor $\mathcal{A}^2$ az azonosan 0 transzformáció.

5. Igazolja, hogy a 0 pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\det A = 0$.

6. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeinek ismeretében az A^{-1} mátrix sajátértékeit!

7. Bizonyítsa be, hogy ha az A mátrixnak λ sajátértéke, akkor λ sajátértéke az A^T mátrixnak is!

8. Hogyan néz ki az $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ mátrixnak megfelelő transzformáció egy sajátvektorokból álló bázisban (ha van ilyen)? Határozza meg az A^{2011} mátrixot is!

9. Az $\mathcal{A}$ leképezésnek legyen u és v két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektora. Igazoljuk, hogy ekkor $u+v$ nem sajátvektora $\mathcal{A}$-nak!

10. Határozza meg az alábbi, $\mathbb{R}^n$-en értelmezett lineáris transzformációk sajátértékeit, sajátvektorait!

    a) $\mathcal{A}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 \cdots + x_n \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{B}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$

11. Legyen $z_1 = 4+i$ és $z_2 = 5-2i$ két komplex szám. Mennyi ennek a két számnak az összege, szorzata, konjugáltjaik összege, konjugáltjaik szorzata, z_1 abszolut értéke, a z_1/z_2 hányados?

12. Végezze el az alábbi műveleteket!

    a) $\overline{(2+i)^3}$ b) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ c) $\left|\frac{6+3i}{6-3i}\right|$ d) i^{18} e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

13. $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{102} = ?$

14. Oldja meg a komplex számok között az alábbi egyenleteket!

    a) $z^2 = 2i$ b) $z^2 = 7 - 6\sqrt{2}i$ c) $z^2 - iz + 2 = 0$ d) $z^2 = \overline{z}$

15. Ábrázolja az $x = 1 + i$ és $y = 2 + \sqrt{3}i$ számokat a komplex síkon és írja fel a trigonometrikus alakjukat! Adja meg $\sqrt[3]{x}$ és $\sqrt{y}$ összes értékét!

16. Jellemezzük azokat a z_1, z_2 komplex számokat, melyekre

    a) $z_1 + z_2$ valós

    b) $z_1 \cdot z_2$ valós

17. Igaz-e, hogy két n-edik egységgyök összege, illetve szorzata is n-edik egységgyök?

18. Mennyi az összes n-edik egységgyök összege, illetve szorzata?

19. A klasszikus Mackósajt egy kör alakú dobozban elhelyezett, hat darab 60°-os körcikk formájú sajtból áll. Együnk meg ebből hármat, a maradék hármat pedig forgassuk el tetszőlegesen a doboz középpontja körül (tehát a 60°-os csúcsok továbbra is a kör középpontjában, az ívek pedig a kör kerületén helyezkednek el). Az ívek végpontjai az óramutató járása szerint legyenek rendere A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3. Bizonyítsuk be, hogy a B_1A_2, B_2A_3 és B_3A_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.