Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. november 7.
Kurzus: 22

10. gyakorlat
Lineáris leképezés, képtér, magtér

1. Legyen A az x-tengelyre való tükrözés, B az y-tengelyre való tükrözés mátrixa a szokásos bázisban. Mi az AB mátrix?

2. Határozza meg annak a lineáris transzformációnak a képterét és magterét, melynek mátrixa a szokásos bázisban:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

3. Az x paraméter függvényében határozza meg a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2x \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix}$ mátrix képterét és magterét!

4. Van-e olyan $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris tanszformáció, melynek képterét az $(1, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, 0)$ vektorok, míg magterét a $(0, 1, 0, 0)$ és $(0, 0, 1, 0)$ vektorok generálják?

5. Legyen $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, $u, v \in V_1$. Igazolja, hogy $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$ akkor és csak akkor igaz, ha $u - v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

6. Bizonyítsa be, hogy egy $\mathcal{A}$ egy lineáris transzformációra $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ pontosan akkor teljesül, ha az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$.

7. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképzés V_1-ről V_2-be, $v_i \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ generátorrendszer V_2-ben.

   b) Ha $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban.

   c) Ha $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban, akkor $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben.

8. Egy $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképzésről tudjuk, hogy bármely 4 elem képe lineárisan összefüggő és bármely 6 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem a nulla vektor. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 8$.

9. Ha egy n dimenziós téren ható lineáris transzformációnál $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = 0$ teljesül minden v vektorra, akkor mi lehet $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ és $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ legkisebb és legnagyobb értéke?

10. Legyen V egy 37 dimenziós vektortér, $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Ha tudjuk, hogy $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^2 = 7$ akkor mennyi $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ lehetséges legkisebb, illetve legnagyobb értéke?

11. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egy vektortér olyan lineáris transzformációi, amelyekre $\mathcal{AB}$ az identitás (helybenhagyás). Igaz-e, hogy $\mathcal{BA}$ is az identitás?

12. a) Mutassa meg, hogy a legfeljebb negyedfokú valós együtthatós polinomok vektorterén a deriválás egy lineáris transzformáció!

    b) Írja fel ennek a transzformációnak egy mátrixát!

    c) Mi a transzformáció magtere, illetve képtere?