

1. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? Igazak ezek az állítások?

- (a) Minden csütörtökön van algel gyakorlat.
- (b) Minden olyan hallgató, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.
- (c) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.

2. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, amely egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy 100-szor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet 1 nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén
a) n b) n^3 c) 2^n ?

3. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + 4x + 17 = O(x^3)$, de $x^3 \neq O(x^2 + 4x + 17)$.

4. Adjunk O becslést a következő függvényekre: a) $(n^2 + 8)(n + 1)$ b) $(n \log_2 n + n^2)(n^3 + 2)$ c) $(n^3 + n^2 \log_2 n)(\log_2 n + 1) + (17 \log_2 n + 19)(n^3 + 2)$ d) $(n! + 2^n)(n^3 + \log_2(n^2 + 1))$ e) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

5. Egy algoritmus lépésszámát az n hosszú bemeneteken jelölje $T(n)$. Tudjuk, hogy $T(n) \leq T(n - 1) + n/3$, ha $n \geq 5$, és $T(n) \leq 10$, ha $n < 5$. Igaz-e, hogy ekkor $T(n) = O(n^2)$? És $T(n) = O(n^3)$?

6. Az alábbi függvények közül mely párokra teljesül, hogy $f_i(n) = O(f_j(n))$?

$$f_1(n) = 11n^2, f_2(n) = 8n^2 \log n, f_3(n) = n^2 + 100000$$

7. Bizonyítsd be, hogy $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n))$. ($f(n) > 0$)

8. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k - 2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

9. Egy algoritmusról tudjuk, hogy a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy

- (a) minden páros n -re az n hosszú bemeneteken a lépésszám legalább $1000n \log^3 n$,
- (b) minden n hosszú bemeneten a lépésszám legfeljebb $3^{\log_2 n}$?

10. Az alábbi függvényeket rendezd olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön.

$$f_1(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2^{\log^2 n + \log(n^2)}, f_2(n) = 4^{2(\log n - 5)}, f_3(n) = \frac{100}{n} \cdot (\log n^n)^3$$

11. Egy algoritmus $T(n)$ lépésszámára igaz, hogy $T(n) \leq 2n^2 + T(n - 2)$, ha $n \geq 3$, valamint $T(1) = T(2) = 1$. Következik-e ebből, hogy

- a) $T(n) = 2^{\log^2 n}$ b) $T(n) = O(n^3)$?

12. Tekintsük az $f_1(n) = 2013n!$ és $f_2(n) = 100(n - 1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy

- a) $f_1 = O(f_2)$ b) $f_2 = O(f_1)$ c) $f_1 = \Omega(f_2)$ d) $f_2 = \Omega(f_1)$?

13. Igaz-e, hogy ha $f(n) = O(g(n))$, akkor $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

14. Egy \mathcal{A} algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

- (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
 - (b) minden x bemeneten legfeljebb $2013|x|$ lépést használ?
- (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

15. Van N darab chip, amelyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha kettőt összekapcsolunk, akkor mindkettő kijelzi a másik chipről, hogy jó-e vagy hibás. A jó chip mindig helyesen válaszol, a hibás chip véletlenszerű eredményt ad. Tudjuk, hogy az összes chipnek több, mint a fele jó. Lehetséges-e N -nél kevesebb teszt végrehajtásával kiválasztani egy jó chipet?