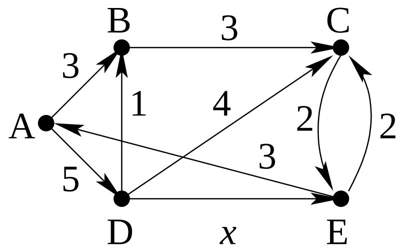
Algoritmusok elmélete zárthelyi (5 éves képzés)
2009. április 24.

1. Tekintsük az $f_1(n) = 2009\,n!$ és $f_2(n) = 100\,(n-1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy
a) $f_1 = O(f_2)$ b) $f_2 = O(f_1)$ c) $f_1 = \Omega(f_2)$ d) $f_2 = \Omega(f_1)$?

2. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Minden lépésnél írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit.



3. Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x, 7, 5, y, 2. Mi lehet az x és mi az y?

4. Legyen $L_1 \in$ RE és $L_2 \in$ RE két nyelv. Az L nyelv szavait úgy kapjuk, hogy veszünk egy $x \in L_1$ szót, egy vele azonos hosszú $y \in L_2$ szót, és a két szó betűit sorban felváltva leírjuk. (Például ha $x = abc$ és $y = def$ akkor így az $adbecf$ és $daebfc$ szavakat kapjuk.) Igazolja, hogy az L nyelv rekurzívan felsorolható!

5. Rekurzív-e az $L = \{w\#x \mid w \in L_d \text{ és } x \notin L_{M_w}\}$ nyelv?

6. Egy 2-3 fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illeve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?

7. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és merre akar rajta áthaladni.) Írjon le egy algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n + e)$, ahol n a csúcsok és e az élek száma.

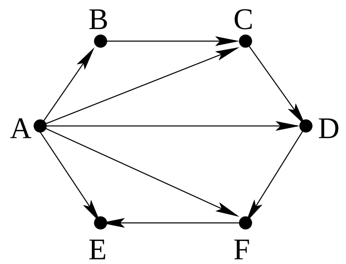
8. Bankunk k féle valutával foglalkozik. Valaki megsúgta nekünk az elkövetkező n napra, hogy melyik nap mi lesz az átváltási arány az egyes valuták között, azaz adottak a $t(m, i, j)$ számok, amelyek azt mutatják, hogy az m-edik napon az i-edik valuta egy egységéért mennyit adnak a j-edik valutából ($1 \leq m \leq n$ és $1 \leq i, j \leq k$). Azt szeretnénk tudni, hogyan lesz az n-edik nap végére a lehető legtöbb forintunk az első nap meglevő 10000 forintunkból. Adjon algoritmust, ami ezt meghatározza, feltéve, hogy minden nap legfeljebb egy átváltást végezhetünk és ha átváltunk, akkor mindig a teljes meglevő összeget váltjuk át. Tegyük fel, hogy az átváltásnak nincs külön költsége. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(nk^2)$.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2009. május 19.

1. Írja le, mit jelent a *kupac tulajdonság* és ismertesse a kupacban a MINTÖR algoritmusát!
2. Definiálja a Post megfeleltetési problémát és adja meg az $\mathrm{R}, \mathrm{co\,R}, \mathrm{RE}, \mathrm{co\,RE}$ osztályok mindegyikére, hogy a problémának megfelelő PCP nyelv beletartozik-e az adott osztályba. (Bizonyítani nem kell.)
3. Írja le a piros-kék algoritmust a piros és kék szabállyal együtt! (Bizonyítás nem kell.)

---

4. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, amelyek csak 0-val kezdődő szavakat fogadnak el. Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.
5. Igazolja, hogy ha az L_1 nyelv Karp-redukálható az L_2 nyelvre és $L_2 \in R$, akkor $L_1 \in R$.
6. Az L nyelv azokból a (G, a, b) hármasokból áll, melyekben G egy olyan irányítatlan gráf, amelynek kiválasztható $a + b$ darab pontja úgy, hogy ezeken a pontokon a G gráf a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf. Vagy adjon az L nyelv felismerésére egy polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a nyelv NP-teljes.
7. A n pontú egyszerű, összefüggő, irányítatlan G gráf a mátrixával adott. A gráf élei kétféle színűek, minden élhez adott, hogy a színe kék vagy zöld. Adott még egy s csúcsa a gráfnak és egy T pozitív egész szám. Adjon algoritmust, amely $O(Tn^2)$ lépésben eldönti, hogy az s csúcsból mely csúcsokba vezet olyan élsorozat (nem kell, hogy út legyen), ami pontosan T élből áll és nincs benne két közvetlenül egymás után jövő azonos színű él.
8. Az alábbi gráfon a Bellman-Ford-algoritmust futtattuk az A pontból kezdve. A keletkezett táblázat megadott első két sorából határozza meg az egyes élek súlyát, és adja meg a táblázat további sorait!



	A	B	C	D	E	F
1.	0	5	10	12	15	11
2.	0	5	6	11	13	9
3.						
...						

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2009. május 28.

1. Írja le a radix rendezést! Milyen esetben alkalmazható? Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)
2. Írja le a legrövidebb utak megatározására való Floyd-algoritmust! Mátrixos megadás esetén mennyi az algoritmus lépésszáma és miért?
3. írja le a $\mathrm{TIME}(f(n)$ és $\mathrm{SPACE}(s(n))$ nyelvosztályok definicióját, és mondja ki a tár-idő tételt! (Bizonyítani nem kell.)

---

4. Egy algoritmus $T(n)$ lépésszámáról azt tudjuk, hogy $T(1) = 10$ és minden $n > 1$ esetben $T(n) \leq 2009n^2 + T(n-1)$. Következik-e ebből, hogy ez a lépésszám
   (a) $O(2^{\log^2 n})$?
   (b) $O(n^4)$?

5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v-nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

6. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, amelyek csak 0-val kezdődő szavakat fogadnak el (de nem feltétlenül minden 0-val kezdődő szót). Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

7. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf, melynek az élei súlyozottak. Tegyük fel, hogy az élsúlyok mind különbözőek. A gráf egy körének értéke legyen a körben szereplő *legnagyobb* élsúly. Olyan kört szeretnénk találni a G gráfban, aminek értéke minimális. Adjon algoritmust, mely $O(|V|^2 \log |V|)$ lépésben talál egy ilyen kört vagy jelzi, hogy nincs kör G-ben.

8. P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2009. június 4.

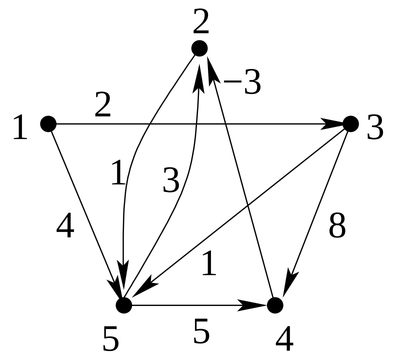
1. Sorolja fel a nyitott címzésű kvadratikus próbájú hashelés műveleteit és írja le az algoritmusukat!

2. Írja le a legrövidebb utak hosszának meghatározására szolgáló Dijkstra-algoritmust! Mi az alkalmazás feltétele? Mennyi a lépésszáma éllistás megadás és kupac alkalmazása esetén? (Indokolni nem kell.)

3. Mit jelent az NP ? Adjon egy példát egy NP-beli problémára, és indokolja is meg, miért tartozik oda.

---

4. Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az F_4 táblázat tartalmazza az ismert úthosszakat.



$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hogyan változik a táblázat amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?

5. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, melyek nem fogadnak el egyetlen páros hosszú szót sem (páratlan hosszú szavakon tetszőlegesen viselkedhetnek). Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

6. Legyen $L_1 \in \mathrm{SPACE}(2^{3 \log n})$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$. Igazolja, hogy $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{EXPTIME}$.

7. Egy téglalap alaprajzú irodát $k \times n$ egyforma kis négyzet alakú részre osztunk. Az építész berajzolta az összes lehetséges falat, ezzel egy $k \times n$ méretű négyzetrácsot kapott. A kis négyzeteket határoló falak egy részét ki akarjuk hagyni oly módon, hogy a bal alsó sarokban levő négyzetből indulva mindenhova el tudjunk jutni. Adott minden falra, hogy annak kihagyása mennyi költséggel jár. Adjon $O(k^2 n^2)$ lépésszámú algoritmust, amivel meghatározhatjuk, hogy mely falakat hagyjuk ki ha a célunk a költség minimalizálása.

8. Legyen az $\mathcal{A}$ probléma a következő: Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. Kérdés, hogy van-e olyan feszítőfája, amiben minden nem-levél csúcs fokszáma 3. A H-s-t-út pedig azt a problémát jelöli, amikor azt kell eldönteni, hogy adott gráfban két adott csúcs között van-e Hamilton-út.

   Igaz-e, hogy

   (a) $\mathcal{A} \prec$ H-s-t-út ?

   (b) H-s-t-út $\prec \mathcal{A}$?

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2009. június 17.

1. Írja le a Hátizsák problémára tanult dinamikus programozásos algoritmust!

   Igaz-e, hogy az algoritmus lépésszáma a bemenet hosszának polinomja? Miért?

2. Írja le Prim algoritmusát a minimális súlyú feszítőfa keresésére. Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos megadás esetén? (Indoklás nem kell.)

3. Adja meg az alábbi definíciókat:

   (a) $f(n)$ időkorlátos Turing-gép (determinisztikus és nemdeterminisztikus),

   (b) TIME($f(n)$), NTIME($f(n)$).

   (c) TIME és NTIME segítségével definiálja a P, NP, EXPTIME osztályokat!

---

4. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlítás alapú rendező algoritmus, melynél minden bemenet esetén minden elem legfeljebb 2009 összehasonlításban szerepel!

5. Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvételi pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjon meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!

   BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – $O(\log n)$

   KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal (FP=p) rendelkező jelentkezők számát határozza meg – $O(\log n)$.

   KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből ($1 \leq i \leq 3$) legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – $O(1)$.

6. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, melyek nem fogadnak el páratlan hosszú szót (páros hosszú szavakon tetszőlegesen viselkedhetnek). Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

7. Legyen az $\mathcal{A}$ probléma a következő: Az adott $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráfban van-e 100 pontú klikk. A $\mathcal{B}$ probléma pedig az X3C (pontos fedés hármasokkal). Igaz-e, hogy

   (a) $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$?

   (b) $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$?

8. A Ládapakolás problémának tekintsük azt a speciális esetét, amikor az n tárgy mindegyike vagy a vagy b méretű, ahol $0 < a < b < 1$ és $a + b = 1$. Adjon ennek megoldására $O(n)$ lépésszámú algoritmust!