Algoritmuselmélet zárthelyi (BSc képzés)
2008. március 28.

1. Jelölje $L(n)$ egy algoritmus lépésszámának maximumát az n csúcsú gráfokon. Tudjuk, hogy ha n páros, akkor $L(n) = L(n/2) + 5$, ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor $L(n) = L(n-2) + 3$. Következik-e ebből, hogy $L(n) = O(n^2)$?

2. Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő, irányítatlan (nem feltétlenül egyszerű) gráf, ami éllistával adott. Hogyan lehet $O(|E|)$ lépésben meghatározni, hogy van-e két azonos fokú csúcsa?

3. Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!

4. A $G = (V, E)$ irányított gráfban a csúcsok egy része fontos, ezeknek a csúcsoknak a halmaza az $\emptyset \neq F \subseteq V$. A gráf minden éléhez tartozik egy pozitív élsúly. Az $u \in F$ fontos csúcs távolsága a $v \in F$ fontos csúcstól a legrövidebb olyan u-ból v-be menő út hossza, aminek nincs u-tól és v-től különböző fontos csúcsa. Legyen a gráf a mátrixával adott, és minden csúcsra adott az is, hogy fontos csúcs-e. Adjon algoritmust ami $O(|V|^2|F|)$ lépésben meghatározza az összes fontos csúcspár közötti távolságot!

5. Egy orvosi rendelőben a regisztrációnál kell bejelentkezni, ahol az ott dolgozók eldöntik, hogy a beteg az épp rendelő két orvos közül A-hoz vagy B-hez kell kerüljön, vagy bármelyikükhöz kerülhet. Ezen kívül, a beutaló ismeretében, a beteghez egy, a sürgősséget kifejező, számot is rendelnek. Amikor valamelyik orvos végzett egy beteggel, akkor azon betegek közül, akiket nem csak a másik orvos láthat el behívja a legnagyobb sürgősségi számút. Tegyük fel, hogy a kiosztott sürgősségi számok egymástól különbözőek. Írjon le egy olyan adatszerkezetet, ami abban az esetben ha n beteg várakozik, akkor a regisztráción az új beteg beillesztését, illetve az orvosoknak a következő beteg kiválasztását $O(\log n)$ lépésben lehetővé teszi.

6. Határozza meg azokat a bináris fákat, amikben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a postorder bejárás által adott sorrend fordítottja!

7. Egy kezdetben üres piros-fekete fába valamilyen sorrendben beszúrtuk az $a < b < c$ elemeket. Mi lehet az eredményül kapott piros-fekete fa, ha a három beszúráson kívül más műveletet nem végeztünk?

8. Egy 15 csúcsú 2-3 fában az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemeket tároljuk. Rajzolja le, hogy néz ki a fa! Hogyan változik meg a fa, ha az 1 elemet töröljük? (Jelezze a törlés során végrehajtott részlépéseket is!)

Algoritmuselmélet pótzárthelyi (BSc képzés)
2008. május 9.

1. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik, akkor $f_i = O(f_j)$ teljesüljön!
$$f_1 = \frac{12}{365}8^n, \qquad f_2 = 2^{n^2}, \qquad f_3 = (2008n)^{10}.$$

2. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok, $0 < a_i < K$. Segítségükkel $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$ alakban akarunk számokat előállítani úgy, hogy mindegyik c_i értéke -1, 0, vagy 1 lehet. Adjon algoritmust, ami az a_i számok és a K ismeretében $O(n^2K)$ lépésben meghatározza, hogy mely számok állnak elő ilyen alakban, és ami előáll, az hányféle $c_1, c_2, \ldots, c_n$ választás esetén!

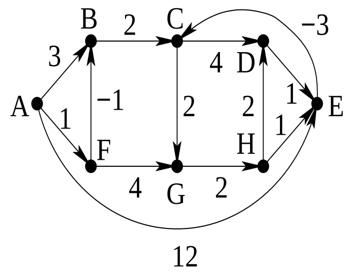
3. Adott n szám, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, valamint egy T érték. Hogyan lehet $O(n \log n)$ összehasonlítással olyan $1 \leq i \neq j \leq n$ indexeket találni, hogy $s_i + s_j \geq T$ teljesüljön, és az $|s_j - s_i|$ érték minimális legyen?

4. Az 10 elemű A tömb első 8 elemére legyen $A[i] = 2i$ $(1 \leq i \leq 8)$, és tekintsük ezt, mint egy 8 elemű kupacot. Rajzolja le az ehhez tartozó fát! Hajtsa végre rajta a BESZÚR(3), BESZÚR(1), MINTÖR műveletsort, rajzolja le az egyes műveletek után a kupacot (és jelezze a közben szükséges részlépéseket is)!

5. Vázolja a 2-3 fának (és műveleteinek) egy olyan módosítását, amiben továbbra is van KERES, BESZÚR, TÖRÖL, MIN, MAX művelet, és ezeken kívül van még RANG és K-ADIK művelet is, ahol RANG(x) azt adja vissza, hogy a tárolt elemek között az x a rendezés szerint hányadik elem, a K-ADIK(i) pedig, hogy a rendezés szerint a tárolt elemek közül melyik az i-edik. A módosítás során a felsorolt szokásos műveletek lépésszámának nagyságrendeje ne változzon, és mindkét új művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.

6. Lehetséges-e, hogy egy piros-fekete fában tárolt elemeket a preorder bejárás szerint kiolvasva a 6, 1, 5, 3, 2, 4 sorrendet kapjuk?

7. A Bellman-Ford eljárással határozza meg az alábbi gráfban az A pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát! Lépésenként jelezze, hogyan változik az algoritmus által kitöltött T tömb!



8. Állatkertünk zsiráfot szeretne venni. Európa útjainak térképe egy súlyozott irányítatlan gráfként adott, melynek csúcsai a városok, az élsúlyok a távolságok. Tudjuk, hogy a gráfban levő n csúcs közül melyik az a néhány, ahonnan be tudjuk szerezni a zsiráfot. Gond az, hogy zsiráf szállítására alkalmas jármű nincs mindenhol, de szerencsére tudjuk, melyik az a J darab csúcs, ahonnan ilyet kölcsönkérhetünk (ezek nem feltétlenül ott vannak, ahol zsiráf is van). Egy adott útvonal költségébe a zsiráfszállító járművel üresen megtett rész hossza (a zsiráfig, és tőlünk vissza a kiindulási helyére) egyszeresen, de a zsiráffal megtett út 5-szörösen számít. Adjon $O(Jn^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megmondja, hogy honnan hozassuk a zsiráfot, és honnan kérjük a járművet, ha azt akarjuk, hogy az költség minimális legyen (az út során természetesen több városon is átmehetünk, ugyanazon a városon akár többször is).

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2008. május 27.

1. Írja le a gyorsrendezés algoritmusát!

2. Írja le az egy pontból induló legrövidebb utak hosszának meghatározására szolgáló Bellman-Ford-algoritmust. Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Igazolja, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$, akkor $L_1 \in \mathrm{NP}$.

---

4. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk A és B, a maximális lépésszámukat leíró függvények legyenek f_A és f_B. Tudjuk, hogy $f_A(n) = O(f_B(n) \cdot \log n)$. Következik-e ebből, hogy
   (a) A mindig gyorsabb mint B ?
   (b) A nagy bemenetekre gyorsabb mint B ?

5. Egy kupacba beraktunk egy új x elemet, majd végrehajtottunk egy MINTÖR műveletet. Mikor fordul elő, hogy végül az eredeti kupacot kapjuk vissza?

6. Éllistával adott egy n pontú e élű irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerétől a levelek felé irányított fa. Adjon $O(ne + n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.

7. Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjon $O(|V| \cdot |E|)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.

8. Költöztetjük az állatkertet. Ehhez rendelkezésünkre áll J darab állatszállító jármű. A járművek egyformák, egy járművel egyszerre legfeljebb T darab állat szállítható, de nem akármilyen összetételben (három elefántot egy autó se bír el, tigrist és zebrát meg egyéb okok miatt nem célszerű együtt vinni). Legyen adott a szállítandó állatok listája, és az is, hogy közülük milyen csoportok szállíthatók közös járműben (a megengedett halmazok név szerint tartalmazzák az állatokat). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a szállítás egy menettel megoldható-e, azaz a feltételeknek megfelelően egyszerre fel tudjuk-e rakni az összes állatot a járművekre Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy azt mutassa meg róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2008. június 3.

1. Írja le az órán tanult KUPACÉPÍTÉS eljárást! Mennyi az eljárás lépésszáma? (Indokolni nem kell és a többi műveletet sem kell leírni.)

2. Írja le a minimáls feszítőfa keresésére való Prim-algoritmust! Mennyi a lépésszáma mátrixos, illetve éllistás esetben? (Indokolni nem kell.)

3. Adjon meg (bizonyítással együtt) egy 3SZíN $\prec$ MAXFTL Karp-redukciót!

---

4. Az 1 és 91 közötti összes 3-mal osztható egész számot valamilyen sorrendben egy M méretű hash-táblába raktuk a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvény segítségével, lineáris próbával. Ennek során hány ütközés fordulhatott elő, ha $M = 35$, illetve ha $M = 36$?

5. Négyen közös barátjukat akarják meglátogatni. Úgy döntöttek, hogy bár mindegyiküknek van kocsija, egy autóval mennek: egyikük elmegy mindegyikük lakásához (tetszőleges sorrendben), összeszedi őket, és együtt fognak megérkezni barátjukhoz. Az úthálózat egy G irányítatlan gráf szomszédossági mátrixával adott, amiben ismertek a szomszédos pontok közötti távolságok. Adott a gráf négy csúcsa x, y, z, t, ahol ők négyen laknak, illetve, hogy a barátjuk lakása melyik b csúcsnál van. Tegyük fel, hogy a kocsik fogyasztása függ attól, hogy hányan ülnek benne, i személy esetén ez mind a négy kocsi esetén kilométerenként c_i. Határozzon meg egy olyan eljárást, ami megadja, ki induljon kocsival, és merre menjen, ha azt akarjuk, hogy a feltételek betartásával a többiek összeszedése, és a barátjukhoz való odajutás teljes benzinköltsége minimális legyen! Az eljárás lépésszáma n csúcsú gráf esetén legyen $O(n^2)$.

6. Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c : E \to \{-1, 1\}$. Adjon algoritmust, ami G-ben $O(|V| + |E|)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő,

7. Legyen L_1 az a nyelv, amelyik az olyan irányítatlan gráfokat tartalmazza, amikben van Hamilton-út és L_2 álljon azokból a páros gráfokból, amikben nincs teljes párosítás. Következik-e, hogy $L_1 \prec L_2$, illetve, hogy $L_2 \prec L_1$?

8. Tekintsük a Hátizsák problémának azt a folytonos változatát, amikor a tárgyak tetszőlegesen darabolhatóak, egy s_i súlyú v_i értékű tárgynak vehetjük az r-edrészét ($0 \leq r \leq 1$ racionális szám), és akkor ennek a résznek rs_i a súlya, rv_i az értéke. Definiálja az ehhez tartozó FOLYTHÁTIZSÁK nyelvet és vagy mutassa meg, hogy ez a nyelv P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2008. június 10.

1. Írja le a 2-3 fáknál használt BESZÚR eljárást! Ha n elemet tárolunk a fában, akkor mennyi az eljárás lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

2. Írja le hogyan lehet egy éllistával adott gráfról $O(n + e)$ lépésben ellenőrizni, hogy a gráf egy dag, és hogy hogyan lehet $O(n + e)$ lépésben meghatározni egy dag topologikus rendezését! (Indokolni nem kell.)

3. Írja le a Ládapakolás problémát! Igazolja, hogy a First Fit eljárás által használt ládák száma legfeljebb kétszerese az optimálisnak.

---

4. Egy bináris keresőfában tárolt y elemhez legyen x a tárolt elemek közül a rendezés szerint az y-t közvetlenül megelőző, z pedig a közvetlenül y után következő. Igazolja, hogy a bináris keresőfában az x, y és z elemeket tároló három csúcsnak összesen legfeljebb 4 fia van.

5. A $G = (V, E)$ többszörös él nélküli irányított gráf olyan éllistával adott, amiben minden csúcsnál a szomszédok tetszőleges sorrendben szerepelhetnek. Készítsen ebből $O(|V| + |E|)$ lépésben olyan éllistát a G gráfhoz, amiben minden csúcsnál a szomszédok növekvő sorrendben vannak felsorolva.

6. Egy ügy intézése során I darab hivatalos iratot kell beszereznünk, méghozzá adott sorrendben, az i-edik iratot csak akkor állítják ki, ha az összes előzőt bemutatjuk. Mindegyik iratról tudjuk, mely hivatalokban lehet beszerezni, az i-edik irathoz adott az azt kiállító hivatalok h_i listája, ebből választhatunk, hogy az i-edik iratért melyik helyre megyünk. Tegyük fel, hogy összesen H különböző hivatal szerepel a listákon, de egy hivatal akár több irathoz tartozó listán is rajta lehet. Tudjuk, hogy tetszőleges hivatalból egy másikba mennyi idő alatt lehet átjutni. Adjon $O(|I| \cdot |H|^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja, hogy melyik iratért hova menjünk, ha a hivatalok közötti közlekedésre fordított időt akarjuk minimalizálni. (Egy hivatalba többször is visszamehetünk.)

7. Tegyük fel, hogy P $\neq$ NP. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?
   (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.
   (b) Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.
   (c) az X probléma NP-beli.
8. Egy munkahelyen buszos kirándulást szerveznek. A jó hangulat érdekében mindenki előre megmondhatta, hogy kivel nem hajlandó egy buszon utazni (több személyt is fel lehetett sorolni). Tegyük fel, hogy tetszőlegesen nagy befogadóképességű buszok állnak rendelkezésre. A szervezők olyan beosztást szeretnének készíteni, ami minél kevesebb buszba beosztja az összes kirándulót úgy, hogy senkinek sem kell olyannal egy buszban ülnie, akivel nem akart. Definiálja a megfelelő nyelvet és vagy mutassa meg, hogy ez a nyelv P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2008. június 17.

1. Írja le az összefésülés és az összefésüléses rendezés algoritmusát. Mennyi a lépésszámuk és miért?
2. Írja le a Dijkstra-algoritmust. Mátrixos megadás esetén mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)
3. Igazolja a Karp-redukció tranzitivitását!

---

4. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű pontok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának minimuma?
5. Éllistájával adott egy n csúcsú F fa, aminek az élei pozitív egész számokkal súlyozottak. A fának bizonyos csúcsai zöldek. Olyan minimális súlyú összefüggő részgráfot keresünk, ami minden zöld csúcsot tartalmaz (lehetnek benne nem zöld csúcsok is). Adjon algoritmust, ami a zöld csúcsok ismeretében $O(n)$ lépésben meghatároz egy ilyen részgráfot.
6. Egy vizsgáról kijőve be akarjuk osztani a vizsgaidőszak hátralevő részét. Még t tantárgyból kellene vizsgáznunk, már mindegyikhez csak egy vizsgaalkalom van. Az összes vizsga (tantárgytól függetlenül) 8-tól 10-ig van, ezért bár lehet egy napra több vizsga is kiírva, egy nap legfeljebb egy vizsgát tehetünk le. Tudjuk, hogy ha az i-edik tantárgyból ($1 \leq i \leq t$) úgy megyünk vizsgázni, hogy az előző napon is volt vizsgánk, akkor $0 < p_i < 1$ az esélye annak, hogy megbukjunk. Ha a legutóbbi vizsga után n nappal megyünk, akkor a bukás esélye p_i/n. Az i-edik tantárgy legyen k_i kredites. Olyan beosztást szeretnénk, hogy a várhatóan megszerzett kreditek összege a lehető legnagyobb legyen. (Ha egy k kredites tárgyból q valószínűséggel bukunk meg, akkor ezen a vizsgán a várhatóan megszerzett kredit $k(1-q)$.) Adjon algoritmust, ami a vizsgaidőpontok, a k_i pozitív egészek és a p_i racionális számok ismeretében $O(t^2)$ lépésben megmondja, hogy mely tárgyakból menjünk el vizsgázni és melyeket érdemes kihagyni, hogy a feltételeknek megfelelő vizsgabeosztást kapjunk.
7. Tegyük fel, hogy az L_1 és L_2 nyelvekre $L_1 \in \mathrm{P}$ és $L_2 \in \mathrm{co\,NP}$. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \setminus L_2 \in \mathrm{NP}$.
8. Álljon az L nyelv az olyan gráfokból, melyek kiszínezhetők 3 színnel (pirossal, kékkel, zölddel) úgy, hogy az élek végpontjai különböző színűek legyenek és kétszer annyi piros csúcs legyen, mint kék. Vagy igazolja, hogy $L \in \mathrm{P}$ vagy azt, hogy L egy NP-teljes nyelv.
