Algoritmusok elmélete zárthelyi (5 éves képzés)
2008. március 28.

1. Jelölje $L(n)$ egy algoritmus lépésszámának maximumát az n csúcsú gráfokon. Tudjuk, hogy ha n páros, akkor $L(n) = L(n/2) + 5$, ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor $L(n) = L(n-2) + 3$. Következik-e ebből, hogy $L(n) = O(n^2)$?

2. Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő, irányítatlan (nem feltétlenül egyszerű) gráf, ami éllistával adott. Hogyan lehet $O(|E|)$ lépésben meghatározni, hogy van-e két azonos fokú csúcsa?

3. Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!

4. A $G = (V, E)$ irányított gráfban a csúcsok egy része fontos, ezeknek a csúcsoknak a halmaza az $\emptyset \neq F \subseteq V$. A gráf minden éléhez tartozik egy pozitív élsúly. Az $u \in F$ fontos csúcs távolsága a $v \in F$ fontos csúcstól a legrövidebb olyan u-ból v-be menő út hossza, aminek nincs u-tól és v-től különböző fontos csúcsa. Legyen a gráf a mátrixával adott, és minden csúcsra adott az is, hogy fontos csúcs-e. Adjon algoritmust ami $O(|V|^2|F|)$ lépésben meghatározza az összes fontos csúcspár közötti távolságot!

5. Egy orvosi rendelőben a regisztrációnál kell bejelentkezni, ahol az ott dolgozók eldöntik, hogy a beteg az épp rendelő két orvos közül A-hoz vagy B-hez kell kerüljön, vagy bármelyikükhöz kerülhet. Ezen kívül, a beutaló ismeretében, a beteghez egy, a sürgősséget kifejező, számot is rendelnek. Amikor valamelyik orvos végzett egy beteggel, akkor azon betegek közül, akiket nem csak a másik orvos láthat el behívja a legnagyobb sürgősségi számút. Tegyük fel, hogy a kiosztott sürgősségi számok egymástól különbözőek. Írjon le egy olyan adatszerkezetet, ami abban az esetben ha n beteg várakozik, akkor a regisztráción az új beteg beillesztését, illetve az orvosoknak a következő beteg kiválasztását $O(\log n)$ lépésben lehetővé teszi.

6. Határozza meg azokat a bináris fákat, amikben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a postorder bejárás által adott sorrend fordítottja!

7. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, amelyek csak páros hosszú szavakat fogadnak el. Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

8. Legyen $L = \{w\#s : w \in L_d$ és M_w nem fogadja el az s szót $\}$. Bizonyítsa be, hogy ez a nyelv nem rekurzív! (L_d a diagonális nyelvet jelöli.)

Algoritmuselmélet pótzárthelyi (5 éves képzés)
2008. május 9.

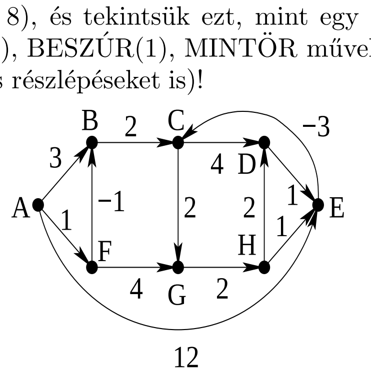
1. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik, akkor $f_i = O(f_j)$ teljesüljön!
$$f_1 = \frac{12}{365}8^n, \qquad f_2 = 2^{n^2}, \qquad f_3 = (2008n)^{10}.$$

2. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok, $0 < a_i < K$. Segítségükkel $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$ alakban akarunk számokat előállítani úgy, hogy mindegyik c_i értéke -1, 0, vagy 1 lehet. Adjon algoritmust, ami az a_i számok és a K ismeretében $O(n^2K)$ lépésben meghatározza, hogy mely számok állnak elő ilyen alakban, és ami előáll, az hányféle $c_1, c_2, \ldots, c_n$ választás esetén!

3. Adott n szám, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, valamint egy T érték. Hogyan lehet $O(n \log n)$ összehasonlítással olyan $1 \leq i \neq j \leq n$ indexeket találni, hogy $s_i + s_j \geq T$ teljesüljön, és az $|s_j - s_i|$ érték minimális legyen?

4. Az 10 elemű A tömb első 8 elemére legyen $A[i] = 2i$ $(1 \leq i \leq 8)$, és tekintsük ezt, mint egy 8 elemű kupacot. Rajzolja le az ehhez tartozó fát! Hajtsa végre rajta a BESZÚR(3), BESZÚR(1), MINTÖR műveletsort, rajzolja le az egyes műveletek után a kupacot (és jelezze a közben szükséges részlépéseket is)!

5. A Bellman-Ford eljárással határozza meg az alábbi gráfban az A pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát! Lépésenként jelezze, hogyan változik az algoritmus által kitöltött T tömb!



6. Állatkertünk zsiráfot szeretne venni. Európa útjainak térképe egy súlyozott irányítatlan gráfként adott, melynek csúcsai a városok, az élsúlyok a távolságok. Tudjuk, hogy a gráfban levő n csúcs közül melyik az a néhány, ahonnan be tudjuk szerezni a zsiráfot. Gond az, hogy zsiráf szállítására alkalmas jármű nincs mindenhol, de szerencsére tudjuk, melyik az a J darab csúcs, ahonnan ilyet kölcsönkérhetünk (ezek nem feltétlenül ott vannak, ahol zsiráf is van). Egy adott útvonal költségébe a zsiráfszállító járművel üresen megtett rész hossza (a zsiráfig, és tőlünk vissza a kiindulási helyére) egyszeresen, de a zsiráffal megtett út 5-szörösen számít. Adjon $O(Jn^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megmondja, hogy honnan hozassuk a zsiráfot, és honnan kérjük a járművet, ha azt akarjuk, hogy az költség minimális legyen (az út során természetesen több városon is átmehetünk, ugyanazon a városon akár többször is).

7. Rekurzív-e az alábbi nyelv?

$$L = \{x\#y : \exists M_x \text{ és } M_x \text{ az } y \text{ bemeneten nem áll meg}\}$$

8. Egy rögzített Σ abc feletti L nyelvhez legyen L' az a nyelv, aminek szavait úgy kapjuk hogy L szavaiból a betűk kevesebb mint felét az összes lehetséges módon elhagyjuk. (Például, ha $abc \in L$, akkor az abc, ab, ac, bc szavak L'-ben vannak.) Igazolja, hogy ha $L \in \text{RE}$, akkor $L' \in \text{RE}$.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2008. május 20.

1. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát a mélységi és befejezési számok meghatározásával kiegészítve! Mennyi az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén és miért?

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet. Mennyi az egyes műveletek lépésszáma tömbös, illetve fás (útösszenyomás nélküli) megvalósítás esetén? (Indoklás nem kell.)

3. Definiálja a TIME(n^2) és SPACE(n^2) osztályokat. Mi a viszonyuk egymáshoz, illetve a rekurzív nyelvek osztályához? Válaszát indokolja is meg!

---

4. Egy $n \times n$ méretű táblázatban racionális számokat tárolunk. Egy lépés során az (i, j) mezőből az $(i, j+1)$, az $(i-1, j+1)$, vagy az $(i+1, j+1)$ mezőkre juthatunk. Határozza meg, hogy ha az első oszlopból az utolsóba akarunk eljutni, akkor mennyi lehet az ehhez használt mezőkön levő számok szorzatának minimuma. (Az első oszlop tetszőleges mezőjéről indulhatunk és az utolsó tetszőleges mezőjére érkezhetünk.) Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2)$.

5. Egy város úthálózata egy n csúcsú irányítatlan gráffal adott, a közlekedési csomópontok a gráf csúcsai. Adott a szomszédos csomópontok közötti távolság. A városban $J < n$ buszjárat van. A járatok végállomásai és a megállói is csomópontokban vannak, egy járat minden megállója különböző. Adott minden járatra, hogy mely csomópontokban vannak az egymás utáni megállók. Két egymás utáni megálló nem biztos, hogy szomszédos pontban van – a busz nem áll meg minden utcasarkon. Viszont az egy csomópontban levő megállók egy helyen vannak, nem kell köztük gyalogolni. Amikor a város egyik pontjából a másikba akarunk eljutni, olyan útvonalat választunk, hogy utunk során összesen a lehető legkevesebbet kelljen gyalogolni (közben tetszőlegesen sokat buszozhatunk, az átszállások száma sem korlátozott). Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatároz két olyan csomópontot, amelyek között a feltételeknek megfelelő útvonalon a legtöbbet kell gyalogolni.

6. Éllistájával adott egy súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf. Tudjuk, hogy G-ben minden pont fokszáma legfeljebb 10. Szintén éllistával adott G-nek egy minimális súlyú F feszítőfája. Azt szeretnénk tudni, hogy egy rögzített $f \in E$ él súlyát mennyivel növelhetjük ahhoz, hogy az F továbbra is minimális feszítőfa maradjon. Adjon algoritmust, ami ezt az értéket $O(n)$ lépésben meghatározza!

7. Igazolja, hogy az alábbi nyelv rekurzívan felsorolható!

$$L = \{w : \exists M_w, \text{ az } M_w \text{ elfogadja a } w \text{ első öt karakteréből álló szót}\}$$

8. Álljon az L nyelv azokból a $G = (V, E)$ egyszerű gráfokból, amelyekben van legalább $|V|/2$ hosszú kör. P-beli vagy NP-teljes ez a nyelv?

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2008. május 27.

1. Írja le a gyorsrendezés algoritmusát!
2. Írja le az egy pontból induló legrövidebb utak hosszának meghatározására szolgáló Bellman-Ford-algoritmust. Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)
3. Igazolja, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in$ NP, akkor $L_1 \in$ NP.

---

4. Éllistával adott egy n pontú e élű irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerétől a levelek felé irányított fa. Adjon $O(ne + n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.
5. Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjon $O(|V| \cdot |E|)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.
6. Költöztetjük az állatkertet. Ehhez rendelkezésünkre J darab állatszállító jármű. A járművek egyformák, egy járművel egyszerre legfeljebb T darab állat szállítható, de nem akármilyen összetételben (három elefántot egy autó se bír el, tigrist és zebrát meg egyéb okok miatt nem célszerű együtt vinni). Legyen adott a szállítandó állatok listája, és az is, hogy közülük milyen csoportok szállíthatók közös járműben (a megengedett halmazok név szerint tartalmazzák az állatokat). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a szállítás egy menettel megoldható-e, azaz a feltételeknek megfelelően egyszerre fel tudjuk-e rakni az összes állatot a járművekre Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy azt mutassa meg róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.
7. Igazolja, hogy az $L = \{w : \exists M_w, \text{ az } M_w \text{ legalább 3 szót elfogad } \}$ nyelv rekurzívan felsorolható.
8. Az L_1 és L_2 nyelvekről tudjuk, hogy $L_1 \in$ PSPACE és $L_2 \in P$. Igaz-e, hogy $L_1 \cap L_2 \in$ EXPTIME ?

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2008. június 3.

1. Írja le az órán tanult KUPACÉPÍTÉS eljárást! Mennyi az eljárás lépésszáma? (Indokolni nem kell és a többi műveletet sem kell leírni.)
2. Írja le a minimáls feszítőfa keresésére való Prim-algoritmust! Mennyi a lépésszáma mátrixos, illetve éllistás esetben? (Indokolni nem kell.)
3. Adja meg az alábbi definíciókat:
   (a) $f(n)$ időkorlátos Turing-gép (determinisztikus és nemdeterminisztikus),
   (b) TIME($f(n)$), NTIME($f(n)$).
   (c) TIME és NTIME segítségével definiálja a P, NP, EXPTIME osztályokat!

---

4. Az 1 és 91 közötti összes 3-mal osztható egész számot valamilyen sorrendben egy M méretű hash-táblába raktuk a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvény segítségével, lineáris próbával. Ennek során hány ütközés fordulhatott elő, ha $M = 35$, illetve ha $M = 36$?
5. Négyen közös barátjukat akarják meglátogatni. Úgy döntöttek, hogy bár mindegyiküknek van kocsija, egy autóval mennek: egyikük elmegy mindegyikük lakásához (tetszőleges sorrendben), összeszedi őket, és együtt fognak megérkezni barátjukhoz. Az úthálózat egy G irányítatlan gráf szomszédossági mátrixával adott, amiben ismertek a szomszédos pontok közötti távolságok. Adott a gráf négy csúcsa x, y, z, t, ahol ők négyen laknak, illetve, hogy a barátjuk lakása melyik b csúcsnál van. Tegyük fel, hogy a kocsik fogyasztása függ attól, hogy hányan ülnek benne, i személy esetén ez mind a négy kocsi esetén kilométerenként c_i. Határozzon meg egy olyan eljárást, ami megadja, ki induljon kocsival, és merre menjen, ha azt akarjuk, hogy a feltételek betartásával a többiek összeszedése, és a barátjukhoz való odajutás teljes benzinköltsége minimális legyen! Az eljárás lépésszáma n csúcsú gráf esetén legyen $O(n^2)$.
6. Legyen M_1, M_2 és M_3 három olyan Turing-gép, aminek a bemeneti ábécéje $\Sigma = \{0, 1\}$. Álljon az L nyelv a Σ^* azon szavaiból, amelyeket a három Turing-gép közül legfeljebb egy fogad el. Igazolja, hogy $L \in \text{co RE}$.
7. Legyen L_1 az a nyelv, amelyik az olyan irányítatlan gráfokat tartalmazza, amikben van Hamilton-út és L_2 álljon azokból a páros gráfokból, amikben nincs teljes párosítás. Következik-e, hogy $L_1 \prec L_2$, illetve, hogy $L_2 \prec L_1$?
8. Tekintsük a Hátizsák problémának azt a folytonos változatát, amikor a tárgyak tetszőlegesen darabolhatóak, egy s_i súlyú v_i értékű tárgynak vehetjük az r-edrészét ($0 \le r \le 1$ racionális szám), és akkor ennek a résznek rs_i a súlya, rv_i az értéke. Definiálja az ehhez tartozó FOLYTHÁTIZSÁK nyelvet és vagy mutassa meg, hogy ez a nyelv P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2008. június 17.

1. Írja le az összefésülés és az összefésüléses rendezés algoritmusát. Mennyi a lépésszámuk és miért?
2. Írja le a Dijkstra-algoritmust. Mátrixos megadás esetén mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)
3. Igazolja a Karp-redukció tranzitivitását!

---

4. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű pontok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának minimuma?
5. Egy vizsgáról kijőve be akarjuk osztani a vizsgaidőszak hátralevő részét. Még t tantárgyból kellene vizsgáznunk, már mindegyikhez csak egy vizsgaalkalom van. Az összes vizsga (tantárgytól függetlenül) 8-tól 10-ig van, ezért bár lehet egy napra több vizsga is kiírva, egy nap legfeljebb egy vizsgát tehetünk le. Tudjuk, hogy ha az i-edik tantárgyból ($1 \leq i \leq t$) úgy megyünk vizsgázni, hogy az előző napon is volt vizsgánk, akkor $0 < p_i < 1$ az esélye annak, hogy megbukjunk. Ha a legutóbbi vizsga után n nappal megyünk, akkor a bukás esélye p_i/n. Az i-edik tantárgy legyen k_i kredites. Olyan beosztást szeretnénk, hogy a várhatóan megszerzett kreditek összege a lehető legnagyobb legyen. (Ha egy k kredites tárgyból q valószínűséggel bukunk meg, akkor ezen a vizsgán a várhatóan megszerzett kredit $k(1-q)$.) Adjon algoritmust, ami a vizsgaidőpontok, a k_i pozitív egészek és a p_i racionális számok ismeretében $O(t^2)$ lépésben megmondja, hogy mely tárgyakból menjünk el vizsgázni és melyeket érdemes kihagyni, hogy a feltételeknek megfelelő vizsgabeosztást kapjunk.
6. Tekintsük a dominóproblémának azt a változatát, amikor csak egy fajta dominó van (de abból persze végtelen sok darab). Rekurzív-e az így módosított problémához tartozó nyelv?
7. Tegyük fel, hogy az L_1 és L_2 nyelvekre $L_1 \in \mathrm{TIME}(n^3)$ és $L_2 \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. Adjon meg olyan f függvényt, amire a feltevésből következik, hogy
$L_1 - L_2 \in \mathrm{TIME}(f(n))$.
8. Álljon az L nyelv az olyan gráfokból, melyek kiszínezhetők 3 színnel (pirossal, kékkel, zölddel) úgy, hogy az élek végpontjai különböző színűek legyenek és kétszer annyi piros csúcs legyen, mint kék. Vagy igazolja, hogy $L \in \mathrm{P}$ vagy azt, hogy L egy NP-teljes nyelv.