# A Számítástudomány alapjai

**1. ZH javítókulcs (2016. 10. 20.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

1. Hány különböző módon lehet a METAMATEMATIKA szó betűit egy kör mentén úgy elrendezni, hogy mind a 14 betűt pontosan egyszer fel használjuk fel? Két felírást akkor tekintünk azonosnak, ha egyik a másikból egy forgatással megkapható. (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   Mivel a vizsgált szóban pontosan egy I betű szerepel, ezért minden leszámlálandó elrendezés meghatározza a maradék betűk egy ismétléses permutációját, mégpedig úgy, hogy az óramutató járásával egyezően végighaladva olvassuk ki az I-től indulva a betűket. (2 pont)
   Hasonlóan, a maradék betűk tetszőleges ismétléses permutációjához tartozik egy leszámlálandó felírás, mégpedig az, amikoris az I után az adott permutáció szerint következnek a betűk az óramutató járása szerint körbehaladva. (2 pont)
   Ezért a leszámlálandó elrendezések száma megegyezik a 13 maradék betű ismétleses permutációinak számaval. (2 pont)
   Mivel 3 db M, 2db E, 3db T, 4db A és 1 db K betűt kell sorbaraknunk (1 pont)
   az órán tanultak szerint az ismétléses permutációk száma $\frac{13!}{3!^2 \cdot 2! \cdot 4!}$ lesz. (3 pont)

2. A $G$ gráfnak $n+3$ csúcsa van: ebből 3 piros $(a, b, c)$ és $n$ zöld $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Két csúcs pontosan akkor szomszédos $G$-ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a $G$ gráfban?

   A $G$ gráf minden 6 pontú köre olyan, hogy abban a három piros pont mellett három tetszőleges zöld pont szerepel. (2 pont)
   A három zöld pont $\binom{n}{3}$-féleképp választható. (1 pont)
   Azt kell még megszámolnunk, hogy ha rögzítünk három zöld pontot, akkor hány különböző olyan 6 pontú kör van, amelyik a három piros pont mellett éppen ezt a három zöldet használja. (1 pont)
   Járjuk végig a kört úgy, hogy az $a$ pontból indulunk, és a következőnek érintett piros pont a $b$ lesz. Ez a körüljárás meghatározza a zöld pontok egy permutációjat. (2 pont)
   Másfelől, a három kiválasztott zöld pont tetszőleges permutációja egyértelműen meghatároz egy olyan 6 pontú kört $G$-ben, amelyben $a$-ból $b$ felé indulva ilyen sorrendben látjuk a zöld pontokat. (1 pont)
   Ezek szerint minden kiválasztott zöld ponthármashoz tartozó 6 hosszú körök száma pontosan 3!, (2 pont)
   így a kérdésre a válasz $\binom{n}{3} \cdot 3!$. (1 pont)

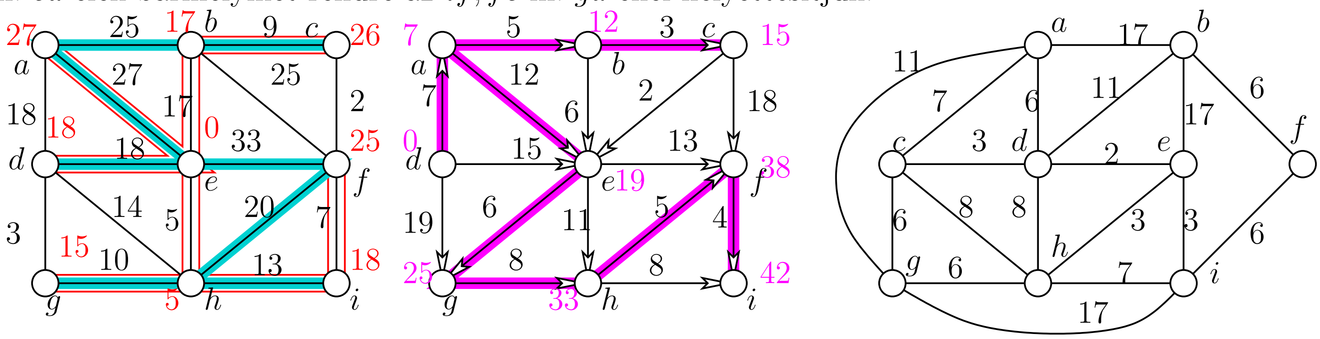
3. Legyen $G$ a bal oldali ábrán látható gráf, az élekre írt számok az adott él szélességét jelentik. Van-e $G$-nek olyan feszítőfája, amely $G$ bármely két csúcsa között tartalmazza $G$ egy legszélesebb útját? Ha van ilyen fa, akkor adjunk meg egyet.

   Az órán azt tanították, hogy nemnegatív élszélességekkel megadott, összefüggő, irányítatlan gráfnak mindig létezik olyan feszítőfája, amely bármely két csúcs között e gráf egy legszélesebb útját tartalmazza. (2 pont)
   Ezért az első kérdésre igenlő a válasz. (1 pont)
   Azt is tanították, hogy ilyen feszítőfát a Kruskal algoritmusnak azzal a módosításával lehet megkonstruálni, amelyikben a szélesség csökkenő sorrendjében döntünk az egyes élek bevételéről (aszerint, hogy körmentes-e az eddig bevett élekkel.) (3 pont)
   Miután lefuttattuk a Kruskal algoritmus ezen változatát, a vastaggal jelölt élek alkotta feszítőfát kapjuk (kaphattunk volna másikat is), és ez a fa a válasz a második kérdésre. (4 pont)

4. Ismét a bal oldali ábrán látható gráfot vizsgáljuk. Most az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden $e$-től különböző $v$ csúcsra egy legrövidebb $ev$ utat.

   Nemnegatív élhosszokkal megadott gráf egy csúcsából kell megtalálni minden más csúcsba egy legrövidebb utat. Az órán tanult Dijkstra algoritmus alkalmas erre. Ha az algoritmus végrehajtása során minden csúcshoz megjelölünk egy olyan élt, amely az adott csúcs gyökértől való távolságát beállította, akkor a megjelölt élek alkotta feszítőfa rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a gyökérből annak mentén minden más csúcsba egy legrövidebb úton lehet eljutni. (3 pont)
   Az gráf csúcsait a Dijkstra algoritmusban $e, h, g, b, d, i, f, c, a$ sorrendben vesszük be a KÉSZ halmazba, és a távolságokra az ábrán a megfelelő csúcs mellett szereplő számokat kapjuk. (4 pont)
   A dupla vonallal jelölt élek alkotta feszítőfa adódik legrövidebb utak fájának, ennek mentén találunk $e$-ből minden más csúcsba egy legrövidebb utat. (3 pont)

   Van egyébként ettől különböző legrövidebb utak fája is, ami szintén helyes. Ilyet kaphatunk ha a $hf, bc$ ill. $ed$ élek bármelyikét rendre az $if, fc$ ill. $gd$ éllel helyettesítjük.



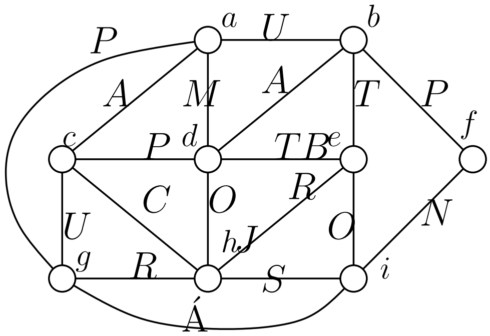
5. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a $c$ tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható.

   Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $d, a, b, c, e, g, h, f, i$ sorrendet. (2 pont)
   Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) ( 4 pont)
   Meg kell még határoznunk a $c$ tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a projekt még a lehető legrövidebb időn belül befejezhető. Vegyük észre, hogy a $c$ tevékenység kezdése közvetlenül csak azokra a tevékenységekre hat, amelyekbe $c$-ből él fut, konkrétan az $e$ és $f$ tevékenységekre. Azonban $e$ és $f$ mindegyike rajta van a $daeghfi$ kritikus úton, így ezeknek a tevékenységeknek muszáj az imént kiszámított kezdési időben elkezdődniük. A $c$ tevékenység legkésőbbi kezdési ideje tehát az a legnagyobb érték, ami még nem veszélyezteti $e$ és $f$ időbeni kezdését. A $ce$ él miatt $c$ nem kezdődhet 17-nél, a $cf$ él miatt pedig 20-nál később. (3 pont)
   A válasz tehát a 17 kezdési idő a $c$ tevékenységre. (1 pont)

⋆ Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat!

   Vizsgáljunk meg egy optimális megoldást! Órarugógerincű barátunk útja a megadott gráf egy olyan zárt élsorozatának felel meg, ami minden élt legalább egyszer tartalmaz. Készítsük el azt a gráfot, amelyet az ábrabeliből úgy kapunk, hogy minden élt annyi párhuzamos példányban húzunk be, ahányszor OF végigrepült az adott útszakaszon. Az így kapott $G'$ gráfon OF útja egy Euler-körséta lesz. (3 pont)
   A feladatunk tehát az, hogy a lehető legkisebb összhosszúságú párhuzamos élek behúzásával elérjük,

hogy a kapott $G'$ gráfnak legyen Euler-körsétája. (1 pont)
Mivel az eredeti $G$ gráf összefüggő, ezért az Euler-körséta létezésére vonatkozó, órán tanult tétel szerint csupán azt kell elérni, hogy minden fokszám páros legyen a párhuzamos élek behúzása után. Világos, hogy egyetlen élnek sem érdemes két párhuzamos példányát behúzni az eredeti mellé, hiszen ekkor kettővel kevesebb párhuzamos példányt behúzva egyrészt párosak maradnának a fokszámok, másrészt a párhuzamosan behúzott élek összhossza csökkenne. Márpedig egy fenyegető menyétinvázió árnyékában egyetlen hazafi sem vállalhat felesleges sétarepülést. (2 pont)
Az ábrán megadott gráfnak pontosan két páratlan fokú pontja van: $d$ és $h$. A megpárhuzamozott élek tehát egy $d$ és $h$ közötti utat jelölnek ki $G$-ben, a mi célunk pedig ezen út összhosszának minimalizálása. (2 pont)
Egy legrövidebb $dh$ utat kell tehát keresnünk. Ez a tanult algoritmusok nélkül is megy, hiszen a $deh$ út hossza 5, és ennél rövidebb élen csak $c$-be juthatunk $d$-ből, ahonnan nem lehet 5-nél rövidebb élen folytatni az utat. (1 pont)
OF optimális útvonala tehát olyan lesz, ami minden élt pontosan egyszer jár be, kivéve a kétszer bejárt $de$ és $dh$ éleket. A feladat szerint meg is kell tervezni egy ilyen útvonalat. Erre egy lehetőség egy tetszőleges Euler-séta $d$-ből $h$-ba, majd a $he$ ill $ed$ élek bejárása. (1 pont)
Szegény Felpattanó! Rajta tán még ez sem segít. Nosza, itt egy itiner, hogy még Mutyipusztán is értsék:
P-A-P-U-C-S-O-R-R-Á-N-P-A-M-U-T-B-O-J-T (ld ábra). (0 pont)




Egy szöveges példa néha nem tud minden részletre kitérni, így arra sem, hogy az épületek fölött repülési tilalom van érvényben, különösen a veszélyes lúgot szállító járművekre. Így hősünknek az útvonalat értelemszerűen a gráfélek mentén kell terveznie. Mivel ez a kikötés nem szerepelt a feladat kitűzésében, az a jogászkodó hallgató, aki erre rámutat, ezért 1 pontot érdemel. A további pontozás a fenti leírás szerinti, azzal, hogy 10 pontnál több nem szerezhető.

# A Számítástudomány alapjai

**2. ZH javítókulcs (2016. 11. 24.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

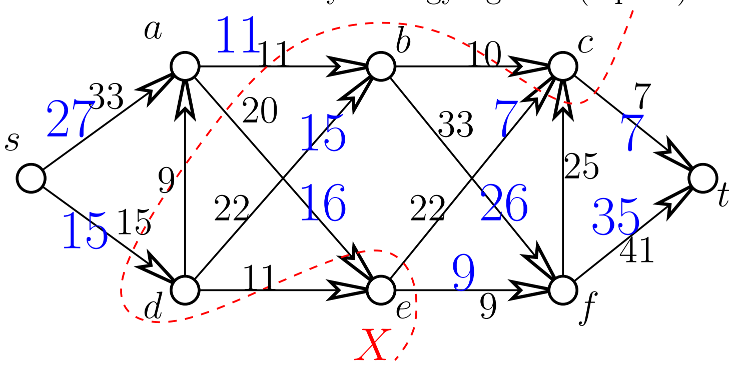
1. Tegyük fel, hogy a $G$ gráfnak 100 pontja van, kromatikus száma $\chi(G) = 15$, és $G$-nek van 8 olyan pontja, amelyek egymással és $G$ minden más pontjával össze vannak kötve. Mutassuk meg, hogy a $G$-beli független pontok maximális számára $\alpha(G) \geq 14$ teljesül.

   Tekintsük $G$ csúcsainak egy $\chi(G) = 15$ színnel történő kiszínezését. Ebben a színezésben a 8 teljes fokú pont mindegyike egymástól és a többi csúcs színétől különböző színt kap. (3 pont)
   A maradék 92 pontot tehát $15 - 8 = 7$ színnel színeztük ki. (3 pont)
   E 7 színhez tartozó színosztályok között van tehát olyan, amely legalább $92/7 > 13$ színt tartalmaz. (3 pont)
   Ez a színosztály tehát egy legalább 14 pontú független ponthalmaz, így $\alpha(G) \geq 14$. (1 pont)

2. Mutassunk a bal oldali ábrán látható $(G, s, t, c)$ hálózatban egy minimális kapacitású $st$-vágást.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány $st$-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú $f$ folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az $f$ folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (7), $sdeft$ (9), $sdbft$ (6) $sabft$ (4), $saedbft$ (9), $saecbft$ (7) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   A megfelelő segédgráfban $s$-ből elérhető pontok $X$ halmaza által meghatározott $st$-vágás szintén 42 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam, ezért tetszőleges $st$-vágás kapacitása legalább 42. Márpedig mi találtunk egy pontosan 42 kapacitású $st$-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonallal jelzett $st$-vágás valóban minimális kapcitású. (2 pont)




   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és $st$-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

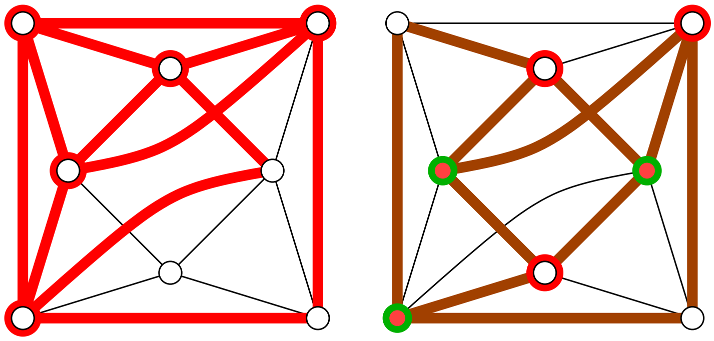
3. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ páros gráfnak 100 pontja van, és független pontjainak maximális száma $\alpha(G) = 50$. Igazoljuk, hogy $G$ pontjainak tetszőleges $X$ részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

   Mivel egy páros gráfban bizonyosan nincs hurokél, alkalmazhatjuk Gallai tételét, (1 pont)
   miszerint $100 = |V(G)| = \alpha(G) + \tau(G) = 50 + \tau(G)$, azaz $\tau(G) = 100 - 50 = 50$. (2 pont)
   Kőnig tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$ teljesül tetszőleges páros gráfban, így $\nu(G) = \tau(G) = 50$. (2 pont)
   Mivel $G$-nek 100 pontja van, ezért a $\nu(G) = 50$ azt jelenti, hogy $G$-nek van teljes párosítása. (2 pont)
   A Frobenius-tétel miatt ilyenkor bármely színosztály bármely $X$ részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül, (2 pont)
   és a páros gráf struktúrájából adódóan ebből az is következik, hogy az $|N(X)| \geq |X|$ reláció a $G$ gráf csúcsainak *tetszőleges* részhalmazára fennáll. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható gráf?

   A kérdezett gráf nem síkbarajzolható. Ennek indoklásához a Kuratowski tétel miatt elegendő a megadott gráfnak olyan részgráfját találni, ami $K_5$ vagy $K_{3,3}$ soros bővítése. (3 pont)

Egy ilyen részgráf konkrét megadása fejezi be a bizonyítást. (7 pont)
(Az alábbi ábra két lehetséges részgráfot mutat.)



5. 100 villamosmérnök-hallgató jár SzA előadásra. Közülük azok a hallgatók, akiknek pzh-t kell írniuk, az előadás végén bedobnak fejenként 42 db egyforintost egy kalapba. Az így összegyűjtött pénzt a tankörvezető 128 forintonként rollnikba csomagolja, amiket majd kisorsolnak a diplomaosztón. Végül éppen 100 forint maradt rollnizatlan. Hány hallgatónak kell pzh-t írnia? (A feladatbeli szereplők kitalált személyek: bárminemű hasonlóság a valósággal puszta véletlen.)

Ha $x$ hallgató köteles iv-zni, akkor érvényes a $42x \equiv 100(128)$ kongruencia. (2 pont)
2-vel osztáskor a modulust is osztva ekvivalens átalakítással $21x \equiv 50(64)$ adódik. (2 pont)
Mivel $(64, 3) = 1$, ezért a 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás: $63x \equiv 150(64)$ . (2 pont)
Innen $-x \equiv 22(64)$, azaz $x \equiv 42(64)$ . (1 pont)
Figyelembevéve, hogy $0 \leq x \leq 100$, $x = 42$ adódik, (2 pont)
tehát a válasz 42. (1 pont)

Megoldható a feladat másképp is. Legyen $y$ az elkészült rollnik száma. Ekkor $128y+100 = 42x$ alapján a $128y \equiv -100(42)$ lineáris kongruencia adódik. (2 pont)
Redukálás után kapjuk a $2y \equiv 26(42)$ kongruenciát, (2 pont)
amit 2-vel osztva a megoldás $y \equiv 13(21)$ lesz. (2 pont)
A kapott rollnik száma nem lehet több mint $42 \cdot 100/128 < 33$, (1 pont)
ezért csakis az $y = 13$ lehetséges, (1 pont)
ahonnan $128y + 100 = 42x$ alapján $x = 42$. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy valamely $G$ véges, egyszerű gráfban a lefogó ponthalmaz minimális méretére és a maximális klikkméretre $\tau(G) = \omega(G) - 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy $G$ kromatikus száma $\chi(G) = \omega(G)$.

Az órán azt tanították, hogy $\chi(G) \geq \omega(G)$ teljesül minden véges, egyszerű $G$ gráfban, (1 pont)
ezért elegendő a $\chi(G) \leq \omega(G)$ egyenlőtlenséget igazolni, (1 pont)
amihez nem kell más, mint azt megmutatni, hogy $G$ csúcsai kiszínezhetők $\omega(G)$ színnel. (1 pont)
Mivel $\omega(G) = \tau(G)+1$, ezért elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges véges, egyszerű $G$ gráf csúcsai $\tau(G) + 1$ színnel kiszínezhetők. (1 pont)
Tekintsünk egy minimális (azaz $\tau(G)$) méretű lefogó $U$ ponthalmazt, és színezzük ki az $U$-beli pontokat csupa különböző színnel, majd adjunk a $V \setminus U$-beli pontoknak egy, az eddig felhasználtaktól különböző, közös színt. (3 pont)
Így $G$ minden csúcsához rendeltünk színt, és ehhez $\tau(G) + 1$ színt használtunk fel. (1 pont)
Legyen $e$ a $G$ gráf egy éle és legyen $u$ az $e$ egy $U$-beli végpontja. Mivel az $u$-hoz használt színt semelyik más csúcshoz nem használtuk fel, ezért $e$ két végpontja különböző színt kapott, (1 pont)
így meg tudtuk színezni $G$ csúcsait $\tau(G) + 1$ színnel. Ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

# A Számítástudomány alapjai

**1. pZH javítókulcs (2016. 12. 05.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

1. Hányféle útvonalon tuduk eljutni a síkon $(0,0)$ koordinátájú pontból a $(9,10)$ koordinátájú pontba úgy, hogy az útvonal minden pontjának valamelyik koordinátája egész legyen, továbbá az út során sosem távolodhatunk a célponttól?
   (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   Minden leszámlálandó útovonalnak megfelel egy olyan 19 hosszúságú sorozat, amely az egyes lépéseink sorrendjét írja le, azaz minden karakter vagy **j** vagy **f** és pontosan 9 db **j** és 10 db **f** karaktert tartalmaz. (2 pont)
   Különböző útvonalakhoz különböző sorozatok tartoznak, továbbá minden fenti tulajdonságú sorozat meghatároz egy leszámlálandó útvonalat. (2 pont)
   Ezért a leszámlálandó útvonalak száma pontosan annyi, mint a fenti tulajdonságú sorozatok száma. (2 pont)
   Az ilyen sorozatokat pedig úgy kaphatjuk meg, hogy tetszőlegesen megválasztjuk, hogy a 19 karakterből melyik 9 helyen vannak a **j** karakterek. (2 pont)
   Ezt pontosan $\binom{19}{9}$-féleképp tehetjük meg, ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy az $F$ fának csak első-, másod- és harmadfokú csúcsai vannak, utóbbiból pontosan tíz darab. Határozzuk meg $F$ leveleinek (azaz elsőfokú csúcsainak) a számát.

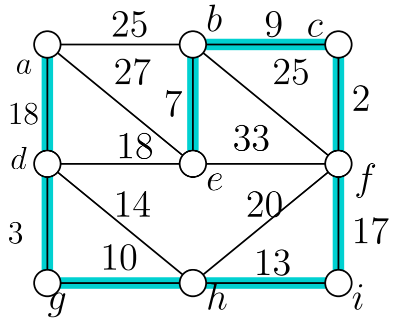
   Jelölje $n_1, n_2$ ill. $n_3$ rendre a levelek, másodfokú csúcsok és harmadfokú csúcsok számát. Ekkor $F$ csúcsainak száma $n = n_1 + n_2 + n_3$ és a feltétel miatt $n_3 = 10$. (2 pont)
   Az $F$ fa éleinek száma a tanultak szerint $|E(F)| = n - 1 = n_1 + n_2 + n_3 - 1$ (3 pont)
   Tanultuk, hogy véges gráf csúcsainak fokszámösszege éppen az élszám kétszerese, (3 pont)
   azaz $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 2$, ahonnan $n_1 = n_3 + 2 = 10 + 2 = 12$ adódik. A kérdésre a válasz tehát az, hogy $F$-nek pontosan 12 levele van. (2 pont)

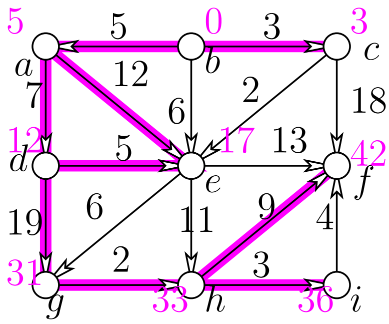
3. A bal oldali ábrán látható a $G$ irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha $e$ és $h$ pontok közé egy új $eh$ élt húzunk be, akkor ezen élnek milyen költséget adhatunk ahhoz, hogy $eh$ benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális költségű feszítőfájában.

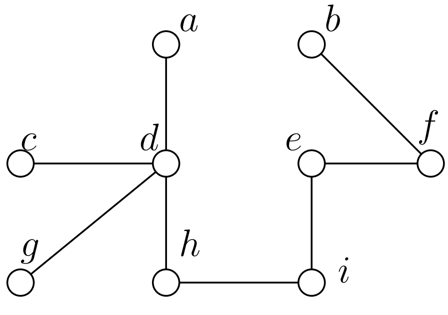
   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével az élekről növekvő költség szerint eldöntjük, hogy bevesszük-e a feszítőfába. A bal oldali ábrán az ily módon kapott, minimális költségű $F$ feszítőfa látható. (5 pont)
   Az $eh$ él behúzása a feszítőfában létrehozza az $ebcfih$ kört. Ezen a körön a 17 költségű $fi$ él a legdrágább. (1 pont)
   Ha tehát $eh$ költsége legfeljebb 17, akkor $F$-ből törölve $fi$-t és bevéve $eh$-t egy $F$-nél nem drágább feszítőfát kapunk, ezért ebben az esetben az $eh$ él benne lehet minimális költségű feszítőfában. (1 pont)
   Ha azonban $eh$ költsége 17-nél több, akkor bárhogyan is veszünk egy, az $eh$ élt tartalmazó feszítőfát, ha ebből töröljük $eh$-t, akkor az $ebcfih$ út valamely $x$ éle az így keletkező két komponenst köti össze.
   Ezért ha $eh$-t $x$-re cseréljük, akkor egy olcsóbb feszítőfát kapunk, (1 pont)
   így $G$-nek semelyik $eh$-t tartalmazó feszítőfája nem lehetett minimális költségű. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát az, hogy az $eh$ élköltsége legfeljebb 17 lehet. (1 pont)

4. Határozzuk meg a középső ábrán látható PERT problémában a kritikus tevékenységeket.

Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $b, a, c, d, e, g, h, i, f$ sorrendet. (2 pont)
Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) ( 5 pont)
Ezutan meghatározzuk a kritikus tevékenységeket, azaz mindazon tevékenységeket, melyek kritikus úton vannak. (1 pont)
Kritikus út jelen esetben az olyan irányított $bf$-út, amely megjelölt élekből áll. (1 pont)
Egyetlen kritikus út van, mégpedig a $badghf$, ezért a kritikus tevékenységek kizárólag ezen út pontjai, azaz $b, a, d, g, h, f$. (1 pont)
A PERT problémában a legrövidebb végrehajtási idő egyébként 42. (0 pont)




5. Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű $G$ gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre $3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9$. Bizonyítsuk be, hogy $G$-nek nincs Hamilton-köre.

A 3 db 9-edfokú csúcs $G$ minden más csúcsával és egymással is szomszédos. (2 pont)
Ezért ha elhagyjuk ezt a három csúcsot, akkor az így kapott gráfban a fokszámok $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$ lesznek. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy három izolált pont mellett még 4 db negyedfokú pontot kapunk, azaz a törlés után megmaradó gráfnak legalább 4 komponense lesz. (3 pont)
A Hamilton-kör létezésének tanult szükséges feltétele szerint $k$ pont elhagyásakor egy Hamilton-körrel rendelkező gráf legfeljebb $k$ komponensre eshet szét. Ez a feltétel a megadott $G$ gráfban nem teljesül, tehát $G$-nek nincs Hamilton-köre. (3 pont)
Mivel a fenti 3 csúcs törlése után legalább 5 komponens keletkezik, $G$-nek Hamilton-útja sincs. (0 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a jobb oldali ábrán látható $F$ fa a $G$ gráfnak egyszerre az $h$-gyökerű BFS fája és a $d$-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet $G$-nek?

Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráfban a DFS bejárás után nem lesz keresztél, (2 pont) és az is szerepelt, hogy a BFS fának csak olyan csúcsai között futhatnak $G$ élei, melyek gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. (2 pont)
Tehát $G$ minden, a megadott fában nem szereplő éle a $d$ gyökérből nézve leszármazottakat köt össze, míg a $h$ gyökérből nézve keresztélnek kell lennie. (2 pont)
Ebből az következik, hogy csak olyan éle lehet $G$-nek a megadottakon kívül, amely $d$-ből indul, (1 pont) továbbá (mivel $d$ a $h$-tól 1 távolságra van), az él másik végpontja $h$-tól a fában $0, 1$ vagy 2 távolságra lehet. (1 pont)
Az $d$ további szomszédai tehát csakis $i$ és $e$ lehetnek, ráadásul mindkettő valóban lehet is szomszéd, hisz mind a DFS, mind a BFS meg tudja találni $F$-et, ha ezen élek jelenlétében futtatjuk a megfelelő gyökérből. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy $G$-nek az $F$ élein túl legfeljebb két további éle lehet, ami összesen 10 él. Ez a válasz tehát a feladat kérdésére. (1 pont)

# A Számítástudomány alapjai

**2. pZH javítókulcs (2016. 12. 05.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

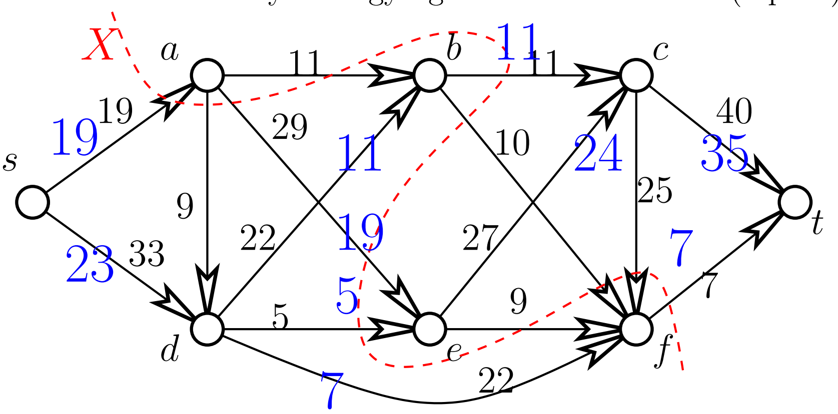
1. Tegyük fel, hogy $G$ egy 100 pontú, egyszerű gráf, melynek komplementerében a maximális klikkméret $\omega(\overline{G}) = 10$, és $G$ egy $v$ pontjának foka pedig $d(v) = 92$. Mutassuk meg, hogy a $G$ kromatikus számára fennáll a $\chi(G) \geq 11$ egyenlőtlenség.

   Mivel $\alpha(G) = \omega(\overline{G}) = 10$, (1 pont)
   ezért $G$ bármely színezése olyan, hogy abban egyetlen színosztály mérete sem lehet 10-nél nagyobb. (3 pont)
   Ráádásul a $v$-t tartalmazó színosztály csakis olyan pontokat tartalmazhat, amelyekkel $v$ nincs összekötve. Márpedig ilyen pontból ($v$-t is beleértve) összesen $100 - d(v) = 8$ db van. (2 pont)
   Ha tehát elhagyjuk a $v$ csúcs színosztályát, legalább 92 pont marad, amelyeknek a lefedéséhez legalább $\frac{92}{10} > 9$ színosztály szükséges. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy bármely színezésnek van legalább 10 olyan színosztálya, amely $v$-t nem tartalmazza, tehát $G$ pontjainak kiszínezésére 10 szín nem elegendő, így $\chi(G) \geq 11$ adódik a kromatikus számra. Nekünk pedig pontosan ezt kellett megmutatnunk. (2 pont)

2. Találjunk a bal oldali ábrán látható $(G, s, t, c)$ hálózatban egy maximális nagyságú $st$-folyamot.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány $st$-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú $f$ folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az $f$ folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (7 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (11), $sdft$ (7), $sdect$ (5) $saect$ (8), $sdbaect$ (11) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

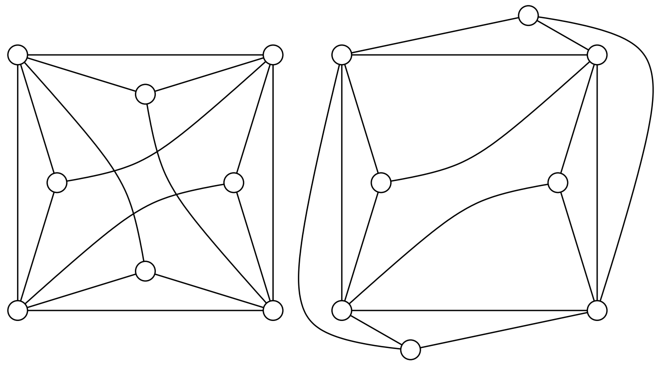
   A megfelelő segédgráfban $s$-ből elérhető pontok $X$ halmaza által meghatározott $st$-vágás szintén 42 kapacitású. (2 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 kapacitású $st$-vágás, ezért tetszőleges $st$-folyam nagysága legfeljebb 42. Márpedig mi találtunk egy pontosan 42 nagyságú $st$-folyamot. Ez azt mutatja, hogy az ábrán megadott $st$-folyam valóban maximális nagyságú. (1 pont)

   A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és $st$-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik. Ha azonban nincs semmiféle indoklás arra vonatkozóan, honnan származik a folyam (és a vágás), és a megadott $f$ nem maximális folyam (esetleg nem is folyam), úgy legfeljebb az a 2 pont járhat, ami az optimalitási feltétel ellenőrzésével történő indoklását értékeli.

3. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható $G$ gráf?

   Igen, síkbarajzolható. Ennek bizonyítására elegendő egy konkrét síkbarajzolást mutatni. (2 pont)
   Egy ilyen látható a jobb oldali ábrán. (8 pont)



4. Festéktüsszentő Hapci Benő és Madárvédő Golyókapkodó egyaránt január 1-jén születtek: Festéktüsszentő 2013-ban, Madárvédő pedig 1991-ben. Hány éves Festéktüsszentő akkor, amikor életkora utoljára osztója Marárvédő életkorának és egyúttal az aktuális évszámnak is?

   Legyen $x$ a kérdezett életkor. Amikor a szóban forgó konstelláció bekövetkezik, az aktuális évszám $2013 + x$, Madárvédő életkora pedig $x + 22$. (2 pont)
   A legnagyobb olyan $x$ egészet keressük tehát, amelyre $x \mid 2013 + x$ és $x \mid x + 22$ egyaránt teljesül. (2 pont)
   Az első oszthatóság ekvivalens azzal, hogy $x \mid 2013$, a második pedig azzal, hogy $x \mid 22$. (1 pont)
   Ezek szerint a célunk 2013 és 22 legnagyobb közös osztójának meghatározása. (2 pont)
   Szerencsére tanultuk az Euklideszi algoritmust, így ezzel határozzuk meg a választ, mégpedig úgy, hogy minden lépésben a két szám közül a nagyobbikat a kisebbikkel történő osztási maradékra cseréljük: $(2013, 22) = (22, 11) = (11, 0) = 11$, (3 pont)
   tehát a kérdésre a válasz az $x = 11$. (1 pont)

   Természetesen a kanonikus alakokból is meghatározható a legnagyobb közös osztó.

5. Mely $x$ egészekre áll fenn a $42x \equiv 33(51)$ kongruencia?

   Az $ax \equiv b(m)$ kongruencia megoldhatóságának tanult szükséges és elégséges feltétele az, hogy $(a, m) \mid b$ teljesüljön. (1 pont)
   Ez teljesül, hiszen $3 = (42, 51) \mid 33$. Nosza, le is osztunk 3-mal: $14x \equiv 11(17)$. (2 pont)
   A 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás, mivel $(3, 17) = 1$. Ezt kapjuk: $42x \equiv 33(17)$. Innen $mod 17$ redukálás után $-9x \equiv 33(17)$ adódik, amit ügyesen leoszthatunk 3-mal: $-3x \equiv 11(17)$. Egy $-1$-gyel szorzás után $3x \equiv -11(17)$, ahonnan $3x \equiv 6(17)$ következik. Megint oszthatunk 3-mal: $x \equiv 2(17)$. (6 pont)
   Tekintettel arra, hogy végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, a feladat kérdésére a válasz azon $x$-ek halmaza, melyekre $x \equiv 2(17)$ teljesül. (1 pont)
   Ez pedig az eredeti modulis szerint az $x \equiv 2(51)$, $x \equiv 19(51)$ vagy $x \equiv 36(51)$ kongruenciák valamelyikének teljesülésével ekvivalens. (0 pont)

   Természetesen más módszerrel is megoldható a feladat, és a hibátlan megoldás 10 pontot ér. Az is kifogástalan megoldás, ha nem ellenőrizzük az elején a megoldhatóságot, mert hisz annak a levezetésből is adódnia kell.

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ páros gráfnak 100 pontja van, és független pontjainak maximális száma $\alpha(G) = 55$. Igazoljuk, hogy $G$ pontjainak valamely $X$ részhalmazára $|N(X)| < |X|$ teljesül.

Gallai tétele szerint, ha egy $G$ gráfban nincs hurokél, akkor $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. Mivel $G$ páros, ezért nincs benne hurokél, így $\tau(G) = |V(G)| - \alpha(G) = 100 - 55 = 45$. (3 pont)
A páros gráfokra érvényes Kőnig tétel szerint $\nu(G) = \tau(G) = 45$. (3 pont)
Tehát a $G$ egyik színosztálya nem fedhető párosítással. (1 pont)
Ekkor a Hall tétel szerint ebben a színosztályban van olyan $X$ ponthalmaz, amelyre $|N(X)| < |X|$ teljesül, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (3 pont)

Megesik, hogy nem jó feladatot tűzünk ki. Most is így történt. Szerencsére az állítás igaz és a hivatalos megoldás is helyes. Ettől még triviális az állítás, ahogy erre Nguyen Hai rámutatott. Tehát.

Legyen $X$ a $G$ egy 55 pontú független ponthalmaza. Mivel az $X$-beli csúcsok egyikének sincs $X$-beli szomszédja, ezért $N(X) \subseteq V(G) \setminus X$, (8 pont)
azaz $|N(X)| \leq |V(G) \setminus X| = 100 - 55 = 45 < 55 = |X|$. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)