A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2015. 10. 22.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre? (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   A házaspárok sorrendje a sorban 5! lehet, (2 pont)
   és mind az öt házaspár mindegyike 2-féleképp ülhet le a hozzájuk tartozó két székre. (2 pont)
   Mivel ezek a választások egymástól függetlenek, az első kérdésre $2^5 \cdot 5!$ a válasz. (2 pont)
   Ha 13 szék van, akkor a fentieken túl azt is meg kell határozni, hogy melyik legyen a 3 szabadon hagyott szék. (1 pont)
   Minden egyes szabadon hagyható székhármasnak megfelel egy olyan sorozat, amely 5 db 'h' és 3 db 's' jelet tartalmaz. (1 pont)
   Minden ilyen sorozathoz pontosan egy szabadon hagyott székhármas tartozik, ezért, (1 pont)
   mivel $\binom{8}{3}$ ilyen sorozat van, a második kérdésre $\binom{8}{3} \cdot 2^5 \cdot 5!$ a válasz. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.

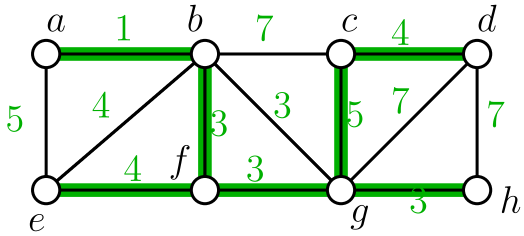
   Ha egy egyszerű gráf v csúcsának fokszáma k, akkor a v-t tartalmazó komponens legalább $k+1$ pontot tartalmaz. (3 pont)
   Ezért a G gráf bármely komponensének legalább 34 pontja van, (3 pont)
   ráadásul G-nek a legalább 66-fokú csúcsa miatt van egy legalább 67 pontú komponense is. (2 pont)
   Mivel egy 67 pontú komponens mellett már nem fér el a 100 pontú gráfban egy 34 pontú komponens, ezért G-nek csak egy komponense lehet, azaz G valóban összefüggő. (2 pont)

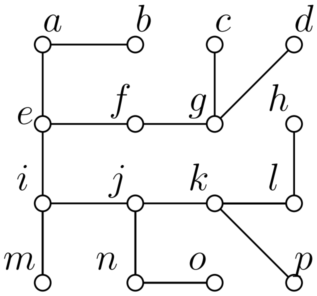
3. A bal oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.

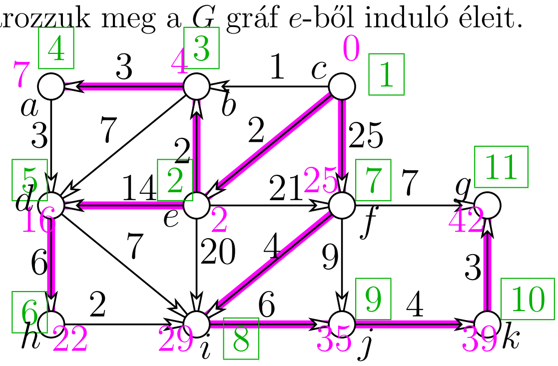
   Minden élre el kell költenünk legalább annyit, mint amennyibe az egyszerű felújítás kerül. Ha ezeket a költségeket tudomásul vettük, arra jutunk, hogy nekünk a kerékpárút-építések össztöbbletköltségét kell minimalizálnunk. (3 pont)
   Elkészítjük tehát a bal oldali ábrán látható gráfot, amely megegyezik a feladatbelivel, de az élekre a két költség különbségét, azaz a kerékpárút építésének többletköltségét írjuk. Mivel a kerékpárúthálózatnak összefüggőnek kell lennie, az így kapott élköltségekhez keresünk minimális költségű feszítőfát. (2 pont)
   Ha ezt meghatároztuk, akkor azzal meg is oldottuk a feladatot: a feszítőfa mentén kerékpárutakat is építünk, a többi élt pedig csak egyszerűen felújítjuk. (1 pont)
   A bal oldali ábrán látható a fent leírt élköltségekkel ellátott gráf. A minimális költségű feszítőfát az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével készítettük el, növekvő többletköltség szerinti sorrendben döntve az egyes élekről. A kapott (egyik lehetséges) feszítőfa éleit zöld színnel megvastagítottuk. (4 pont)

   (Aki nem jön rá, hogy minimális feszítőfát kell keresni, az nem kap pontot. Aki vmi más gráfon futtatja (helyesen) a Kruskalt, az maximum 4 pontot kaphat.)

4. A középső ábrán látható a G irányítatlan gráfnak egy i gyökérből induló mélységi bejárása után kapott F feszítőfája. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.







Tudjuk, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárása utáni osztályozásban a gráfnak nincs keresztéle, azaz olyan éle, amely olyan csúcsokat köt össze, melyek nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
Ezek szerint az e csúcs csakis a fabeli leszármazottaival vagy őseivel lehet összekötve, (3 pont)
konkrétan az a, b, f, g, c, d és i pontokkal. (2 pont)
Mivel tudjuk, hogy e-nek pontosan 7 szomszédja van, ezért e szomszédságát pontosan az iménti 7 pont alkotja, (1 pont)
így a G gráf e-ből induló élei éppen az $ea, eb, ef, eg, ec, ed, ei$ élek. (1 pont)

A feladat sajnos pontatlanul lett kitűzve: a fenti megoldás akkor helyes, ha azt is feltesszük, hogy G egyszerű. Ha valaki így oldja meg a feladatot, akkor értelemszerűen teljes pontszám jár. Ha valaki rámutat arra, hogy lehetnek párhuzamos ill. hurokélek is, akkor az elért eredménnyel arányos pontszámot kaphat.

5. Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható PERT feladat végrehajtásához szükséges t időt és a kritikus tevékenységeket.

Az órán tanult módszerrel (DFS segítségével vagy források egymás utáni törlésével) meghatároztuk a csúcsok egy topologikus sorrendjét, melyet az ábrán zölddel bekeretezett számok jelölnek. (3 pont)
Ebben a sorrendben minden egyes csúcsra meghatároztuk a legkorábbi kezdési időpontot (lila számokkal) és az ezen legkorábbi időpontot meghatározó, lilával jelölt élt (éleket). (4 pont)
Ezek szerint a feladat végrehajtásához szükséges minimális idő 42 egység. (1 pont)
A kritikus tevékenységek pontosan azok a csúcsok lesznek, amelyeken keresztül 42 hosszú út vezet g-be, azaz azok, amelyekből vezet út lila éleken g-be. Ezek a csúcsok pedig c, f, i, j, k és g. (2 pont)

6. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást.

Jelölje G azt a 222 pontú gráfot, amelynek csúcsai a politikusok, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha az adott politikusok ismerik, de nem utálják egymást. A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy G-nek van Hamilton-köre. (3 pont)
Mivel bármely politikusnak legalább $133 - 22 = 111$ olyan ismerőse van, akit nem utál, G minden csúcsának legalább 111 a fokszáma. (3 pont)
Ezért az órán tanult Dirac feltétel teljesül, (1 pont)
így a Dirac tétel miatt G-nek van Hamilton-köre. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (3 pont)

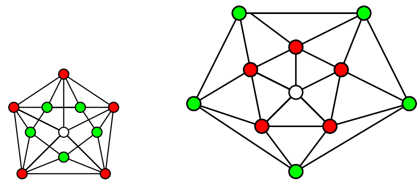
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2015. 11. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

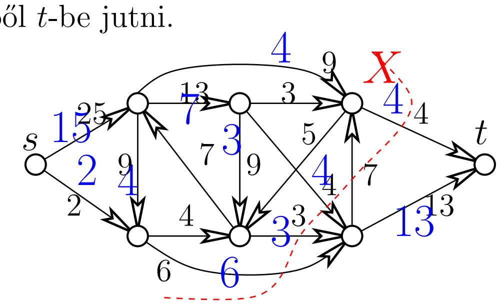
1. A 12 pontú G gráf úgy keletkezik, hogy egy 5 pontú kör minden csúcsát összekötjük egy 7 pontú kör minden csúcsával. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

   Mivel az 5-pontú kör bármely pontja a 7 pontú kör minden pontjával össze van kötve, ezért semelyik olyan szín, amit az 5 pontú kör valamelyik pontjához használtunk nem használtó a 7 pontú kör egyik pontjához sem. (3 pont)
   Mivel sem az 5-pontú, sem a 7-pontú kör nem páros, ezért bármelyik kiszínezéséhez legalább 3 szín szükséges. Az előző megjegyzésünk értelmében ezen színeknek különgbőzőkenek kell lenniük, ezért G színezéséhez legalább $3 + 3 = 6$ szín szükséges. (3 pont)
   Azt kell még megmutatnunk, hogy 6 szín elegendő is. (1 pont)
   Ha pl az 5 pontú kört kiszínezzük 3 színnel, és a 7 pontú kört az eddig használtaktól különböző 3 színnel, akkor éppen G egy 6-színezését kapjuk, (2 pont)
   tehát $\chi(G) = 6$. (1 pont)



2. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható gráf?
   Igen, síkbarajzolható, pl az ábrán látható módon. (10 pont)
3. A sithek Sötét Testvérisége az alábbi gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy
   élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni.

   A feladat megfogalmazható úgy is, hogy ha a megadott gráfban az élekre írt számokat az adott kapacitásnak értelmezzük, akkor minimális kapacitású st-vágást kell találnunk. (2 pont)
   Ezért az órán tanult növelő utas módszerrel maximális nagyságú folyamot keresünk, és ennek segítségével találjuk meg a minimális vágást. (2 pont)



   Az ábra egy 17 nagyságú folyamot mutat (a nagyobb, kékkel írt számok jelentik az adott élen a folyamértéket, ha nincs kék szám, akkor ez 0), (2 pont)
   ezért legalább 17 jedi őrszemre van szükség a támaszpont biztosításához. (1 pont)
   A szaggatott vonallal jelzett X halmaz egy 17 kapacitású st-vágást indukál, (1 pont)
   ezért 17 jedi őrszem elegendő az esemény biztosításához. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát 17. (1 pont)
4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 66, B-ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása.

   A Frobenius tétel értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a két színosztály mérete megegyezik (ami igaz, hisz 99 pontúak), (1 pont) valamint, hogy (mondjuk) az A színosztályra teljesül a Hall-feltétel, azaz az A bármely X részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül. (2 pont)

Legyen tehát $X \subseteq A$. Ha $X = \emptyset$, akkor a feltétel nyilvánvalóan igaz. Ha $1 \leq |X| \leq 66$, akkor $x \in X$ esetén $|X| \leq 66 \leq d(x) \leq |N(X)|$, tehát teljesül a Hall-feltétel. (3 pont)

Ha pedig $|X| > 66$, akkor $|A \setminus X| < 33$, ezért mivel B bármely pontjának a fokszáma legalább 33, ezért bizonyosan van X-beli szomszédja. (2 pont)

Ezek szerint $N(X) = B$, tehát $|X| \leq 99 = |B| = |N(X)|$, a Hall-feltétel ekkor is teljesül, és ezzel az állítás igazoltuk. (2 pont)

Használható Kőnig tétele is.

A G gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha $\nu(G) \geq 99$. (1 pont)

A G gráf páros, így a Kőnig-tétel miatt $\nu(G) = \tau(G)$ (2 pont)

elegendő tehát megmutatni, hogy $\tau(G) \geq 99$. (1 pont)

Legyen tehát X a G egy lefogó ponthalmaza. Ha $|X| < 99$, akkor mindkét színosztálynak van X-en kívüli pontja, A-nak mondjuk a, B-nek mondjuk b. Ahhoz, hogy minden a-ból induló élt lefogjon az X halmaz az kell, hogy a minden szomszédja X-ben legyen, (2 pont)

tehát $|X \cap B| \geq d(a) \geq 66$. (1 pont)

Hasonlóan, ahhoz, hogy minden b-ből induló él le legyen fogva, az szükséges, hogy b minden szomszédja X-ben legyen, tehát $|X \cap A| \geq d(b) \geq 33$. (2 pont)

Ekkor $99 > |X| = |X \cap B| + |X \cap A| \geq 66 + 33 = 99$. A kapott ellentmondás a feladat állítását igazolja. (1 pont)

5. Oldjuk meg a $31x \equiv 13(131)$ lineáris kongruenciát.

Mivel $(4, 131) = 1$, a 4-gyel szorzás ekvivalens átalakítás: $124x \equiv 52(131)$, (2 pont)

azaz $-7x \equiv 52(131)$. (2 pont)

Hasonló okból tudunk 19-cel szorozni: $-133x \equiv 19 \cdot 52 = 988(131)$, (2 pont)

amit redukálva $-2x \equiv 71(131)$, azaz $2x \equiv 60$ adódik. (2 pont)

Most tudunk 2-vel osztani, és megkapjuk a megoldást, ami $x \equiv 30(131)$. (2 pont)

Ha valaki rámutat, hogy $(131, 31) = 1 \mid 13$ miatt pontosan egy mod 131 maradékosztály a megoldás, de más munkát nem végez, kapjon 2 pontot.

6. Ura születésnapjára Tűzvirág egy 77 gyönggyel díszített, mangalicabőr tokot varrt Vérbulcsú ivótülkéhez. Annyira elégedett volt az eredménnyel, hogy Vérbulcsú hagyományőrző dorombegyüttesének minden tagját is ugyanilyen tokkal lepte meg, hogy jól mutasson a csapat a tarsolylemezek mellett csüngő tülkökkel amikor fellépnek Dobogókőn a táltosünnep 50 személyes központi jurtájában. Mivel a kínai boltban százasával árulják a gyöngyöket, 7 gyöngy kimarad, melyekkel Tűzvirág a hétköznapi pártáját ékesítette. Hányan dorombolnak Vérbulcsú zenekarában?

Legyen a zenekar létszáma x. Mivel elférnek a jurtában, ezért $1 \leq x \leq 50$. (2 pont)

Tudjuk, hogy a bőrtokokat $77x$ gyöngy díszíti, amihez hozzávéve Tűzvirág pártájának 7 gyöngyét, 100-zal osztható számot kapunk, (2 pont)

azaz a $77x + 7 \equiv 0(100)$ kongruencia adódik. (1 pont)

A 7-tel osztás ekvivalens átalakítás, tehát $11x + 1 \equiv 0(100)$, vagy másképpen $11x \equiv -1(100)$. (1 pont)

Mivel $(9, 100) = 1$, ezért a 9-cel szorzás ekvivalens átalakítás, azaz $99x \equiv -9(100)$. (1 pont)

Ezt átírva $-x \equiv -9(100)$, (1 pont)

majd a (-1)-gyel szorzás is ekvivalens átalakítás, így $x \equiv 9(100$ adódik. (1 pont)

A zenekar létszáma tehát 9 maradékot ad 100-zal osztva, amit összevetve az első megállapításunkkal $x = 9$ adódik a kérdezett létszámra. (1 pont)

Kongruenciák nélkül is megoldható a feladat.

Mivel 7 db gyöngy maradt ki, ezért az x db tokhoz felhasznált $77x$ gyöngy 10-es számrendszerbeli felírása $\ldots 93$-ra végződik. (3 pont)

Olyan 1 és 50 közötti x-et keresünk tehát, amelyre a $77x$ szorzat $\ldots 93$-ra végződik. Mivel a szorzat utolsó jegye csak az egyes helyiértéken álló számjegyektől függ, és $7x$ utoló jegye 3, ezért x-nek 9-re kell végződnie. (4 pont)

Ha kipróbáljuk a szóba jövő $9, 19, 29, 39$ és 49 számokat, akkor azt kapjuk, hogy csakis $x = 9$ esetén van ez így, ennyi tehát a kérdésre a válasz. (3 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az ébredő erő bemutatóját 7 mikulás nézi meg a krampuszával. Úgy szeretnének leülni egy 14 székből álló sorba, hogy ne üljön minden mikulás a saját krampusza mellett. Hányféleképp tehetik ezt meg? (A 7 mikulás és a 7 krampusz is egymástól jól megkülönböztető.)

   A 14 meselényt 14!-féleképp lehet a széksorba leültetni, (2 pont)
   és ebből a számból kell levonni azon ültetések számát, ahol minden mikulás a krampusza mellett ül. (2 pont)
   Rossz típusú ültetést úgy kapunk, hogy 7! féleképp sorba állítjuk a 7 mikulás-krampusz párt, (2 pont)
   majd minden párhoz kiválasztjuk a 2-féle sorrend valamelyikét, egymástól függetlenül, azaz 2^7-féleképp. (1 pont)
   Mivel a párok minden sorrendhez ugyanennyi pár-rendezés tartozik, ezért a rossz ülésrendek száma $7! \cdot 2^7$, (2 pont)
   a végső válasz tehát $14! - 7! \cdot 2^7$. (1 pont)

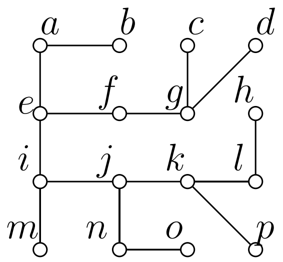
2. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

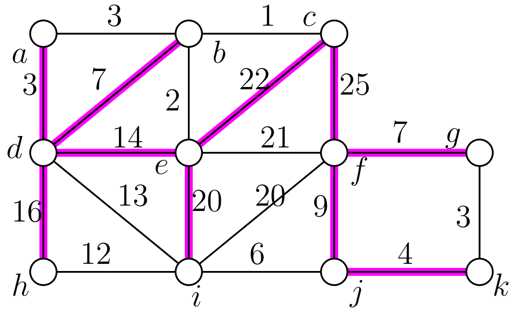
   Legyen K a G gráfnak az a komponense, amely v-t tartalmazza. Az órán tanultak szerint a K gráfban a fokszámok összege megegyezik K élei számának kétszeresével, ezért K-ban a páratlan fokú csúcsok száma páros. (3 pont)
   Mivel v a K egy páratlan fokú pontja, ezért K-nak kell lennie v-n kívül még legalább egy másik páratlan fokú pontjának; legyen mondjuk u egy ilyen pont. (4 pont)
   Miután a v és u pontokat tartalmazó K gráf összefüggő (hisz a G egy komponense), ezért van K-ban (és így G-ben is) v-ből u-ba vezető út. Nekünk pedig pontosan egy ilyen út létezését kellett igazolnunk. (3 pont)

3. Tegyük fel, hogy a K_{2015} teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy u és egy v pontja valamint egy c szín úgy, hogy ne vezessen u-ból v-be olyan út amelynek minden éle c színű.

   Elegendő azt igazolni, hogy van olyan c szín, amelyre a c színű élek nem alkotnak összefüggő gráfot a K_{2015} csúcsain. (3 pont)
   A K_{2015} éleinek száma $\binom{2015}{2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2}$, (1 pont)
   tehát az 1008 felhasznált szín között van olyan c szín, amelyet legfeljebb $\frac{2015 \cdot 2014}{1008 \cdot 2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2016} < 2014$-szer használtunk fel. (2 pont)
   Márpedig ha egy bizonyos színű élek összefüggő gráfot alkotnak, akkor annak a gráfnak van feszítőfája is, (2 pont)
   és ennek a feszítőfának a tanultak szerint éppen $2015 - 1 = 2014$ éle van. (1 pont)
   Mivel az általunk választott c színnel 2014-nél kevesebb élt színeztünk meg, ezért a c színű élek alkotta gráf nem összefüggő, legalább két komponense van, és különböző komponensből választott csúcsok között nem vezethet út csupa c színű élen. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

4. A bal oldali ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.





Azt tanították az órán, hogy a szélességi fa egyúttal a gyökeréből minden más csúcsba a bejárt gráf egy legrövidebb útját tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy ha egy v csúcs a gyökértől k távolságban van a szélességi fán, akkor v csak a gyökértől $k-1$, k ill. $k+1$ távolságban lévő csúcsokkal lehet összekötve. (Más szóval a szélességi bejárás után nincs előreél). (3 pont)

Konkrétan az e csúcs a fában (és így G-ben is) 1 távolságra van i-től, ezért a szomszédai i-től G-ben (így a fában is) csakis $0, 1$ vagy 2 távolságra lehetnek. (3 pont)

A szóbajövő szomszédok tehát i, j, m, a, f, k és n, (3 pont)

ami éppen 7 csúcs, tehát $d(e) = 7$ miatt pontosan ezek az e csúcs szomszédai. A keresett élek tehát ei, ej, em, ea, ef, ek és en. (1 pont)

5. A jobb oldali ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él szélességét jelentik. Ha van, találjuk meg G-nek egy olyan F feszítőfáját, amelyben az F-beli uv-út a G egy legszélesebb uv-útja a G tetszőleges u, v csúcsaira. Határozzuk meg f és h között a legszélesebb út szélességét.

   Az órán azt tanultuk, hogy minden élszélességekkel ellátott irányítatlan gráfhoz van legszélesebb utak fája, és ez a Kruskal algoritmussal megtalálható, amennyiben az élekről csökkenő szélesség szerint döntünk, azaz akkor vesszük be a soron következő élt a fába, ha nem alkot kört a korábban bevett élekkel. (3 pont)

   Ezt a módszert követve kaptuk az ábrán vastag lila élekkel megjelölt feszítőfát. (5 pont)

   Ebben a feszítőfában f és h között az $fcedh$ út vezet, melynek kérdezett szélessége ezen út minimális szélességű élének szélessége, azaz 14. Tehát a feladat második kérdésére 14 a válasz. (2 pont)

6. Van-e valamely $n \geq 2$ egész esetén olyan $2n$ pontú G gráf, hogy G-nek is és komplementerének, $\overline{G}$-nek is van Euler-sétája?

   Van ilyen gráf, például egy 4 pontú út. (5 pont)

   Ez egy út, tehát van Euler-sétája, és a komplementere is egy 4 pontú út, tehát annak is van. (5 pont)

   Annak a tételnek a felidézéséért, hogy ha egy véges, összefüggő gráfban legfeljebb két páratlan fokú csúcs van, akkor van a gráfnak Euler-sétája, 2 pont jár. Aki ebből még azt is levezeti, hogy $n \geq 3$ esetén ez nincs a feladatban leírt tulajdonságú gráf, kapjon még 2 pontot.

A Számítástudomány alapjai

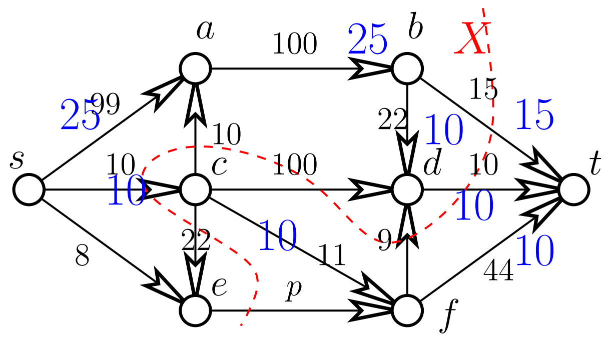
2. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúcs között pontosan akkor fusson él, ha e két csúcs a kocka ugyanazon élének végpontjai. Határozzuk meg a G gráf komplementerének kromatikus számát, $\chi(\overline{G})$-t.

   A $\overline{G}$ gráf kiszínezhető 4 színnel,pl. úgy, hogy a kocka felső lapjának csúcsait 4 különböző színre színezzük, és az alsó lap minden csúcsának a felette levő csúcs színét adjuk. (3 pont)
   Másrészt 4 szín feltétlenül szükséges $\overline{G}$ színezéséhez, hiszen G egy olyan páros gráf, aminek mindkét színosztályában $4-4$ csúcs van (a színosztályok csúcsai egy-egy szabályos tetraédert alkotnak), és G egy színosztálya a komplementerben klikk, tehát már egy színosztály négy csúcsának kiszínezéséhez is legalább 4 szín szükséges. (5 pont)
   Azt kaptuk, hogy 4 szín elegendő, de 3 nem, tehát $\chi(\overline{G}) = 4$. (2 pont)

2. Határozzuk meg a fenti hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.

   Először $p = 0$-ra kerestünk maximális folyamot az órán tanult növelő utas algoritmussal. Az ábrán látható, 35 nagyságú folyamot kaptuk, ahol a kékkel írt nagyobb számok az adott élen folyó folyammennyiséget jelzik. (Amelyik élen nincs ilyen szám, ott 0 folyam folyik.) (3 pont)
   A segédgráfban elérhető pontox X halmaza olyan st-vágást indukál az *eredeti* hálózatban, amelynek kapacitása $c(X) = 35 + p$. (2 pont)
   Mivel egy 42 nagyságú st-folyamhoz az szükséges, hogy minden st-vágás kapacitása legalább 42 legyen, ezért ilyenkor $p \geq 7$. (2 pont)
   Ha $p = 7$, akkor az ábrán látható folyam még növelhető 7-tel a $seft$ úton javítva, tehát $p = 7$ esetén a maximális folyamnagyság az X által indukált 42 kapacitású vágás miatt pontosan 42. (1 pont)
   Ha azonban $p > 7$, akkor az említett $seft$ úton 7-nél több folyam is küldhető, így a maximális folyamnagyság 42-nél bizonyosan nagyobb lesz. (1 pont)
   A válasz tehát az, hogy kizárólag $p = 7$ esetén lesz a maximális st-folyamnagyság pontosan 42. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

   A Hall-tétel szerint G-nek pontosan akkor van A-t lefedő párosítás, ha a Hall-feltétel teljesül az A színosztályra, azaz ha $|N(X)| \geq |X|$ áll az A minden X részhalmazára. (3 pont)

Ezt kell tehát ellenőriznünk. Ha $1 \leq |X| \leq 33$, akkor X tetszőleges pontjának van 33 szomszédja, tehát $|N(X)| \geq 33 \geq |X|$. (2 pont)

Ha $33 < |X| \leq 66$, akkor X tartalmazza a 66 db legalább 66-fokú pont valamelyikét, ezért $|N(X)| \geq 66 \geq |X|$. (2 pont)

Ha pedig $X > 66$, akkor X tartalmazza a 99 pontú A színosztály 33 db legalább 99 fokú csúcsának egyikét, azaz $|N(X)| \geq 99 \geq |A| \geq |X|$. (2 pont)

A Hall-feltételt tehát minden esetben teljesül, így G-nek bizonyosan van A-t fedő párosítása. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G-nek?

   Legyen n_3 ill. n_6 a G gráf harmad- ill. hatodfokú csúcsainak száma. Ekkor a szokásos jelölésekkel $n = n_3 + n_6$, (1 pont)
   az feladatbeli feltétel miatt $n_3 = 2 \cdot n_6$ és $t = 14$, (1 pont)
   az Euler-formulából pedig $n + t = e + 2$, hiszen G öf és SR. (2 pont)
   A fokszámösszegről tanultak szerint $2e = 3n_3 + 6n_6$, (1 pont)
   és az így kapott öt egyenletből már meg tudjuk határozni az öt ismeretlent. Pl. $2e = 3n_3 + 6n_6 = 6n_6 + 6n_6$, azaz $e = 6n_6$. Ezt az Euler formulába behelyettesítve $3n_6 + 14 = 6n_6 + 2$, azaz $3n_6 = 12$, vagyis $n_6 = 4$. Innen $n_3 = 2n_6 = 8$ és $e = 6n_6 = 24$ adódik. (4 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát $n = n_3 + n_6 = 12$, $e = 24$. (1 pont)

   Szükségtelen annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy valóban létezik-e a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező gráf, hiszen éppen azt igazoltuk, hogy ha van olyann gráf, aminek létezését a feladat állítja, akkor n és e csak a megoldásban kapott értéket veheti fel. Egyébként van ilyen gráf, és ez mutatja azt is, hogy korrekt érveléssel nem kaphatunk más választ. (Ha ugyanis nem létezne ilyen gráf, azaz a feladat az üreshalmaz eleméről szólna, akkor az is igazolható lenne, hogy a feladatban szereplő gráfnak -7 db éle és $\sqrt{2}$ db csúcsa van.) Abból azonban, hogy találunk egy olyan gráfot, amilyet a feladat körülír, még nem következik, hogy minden ilyen gráfnak ugyanannyi csúcsa és éle van. Minden esetre, aki csak annyi értékelhető munkát végez, hogy talál egy ilyen gráfot (tekintettel arra, hogy ez nem teljesen triviális), az kapjonösszesen 2 pontot.

5. Határozzuk meg az $n = \binom{12}{6}$ pozitív osztóinak számát!

   Tudjuk, hogy ha $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor n pozitív osztóinak száma $d(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$. (3 pont)
   Ezért elég meghatározni az n kanonikus alakját, (2 pont)
   Mivel $n = \binom{12}{6} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, (3 pont)
   az n osztóinak száma $d(n) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 24$. (2 pont)

6. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015(m)$ lineáris kongruenciának megoldása az $x = 3$?

   A kongruencia fennállása azt jelenti, hogy $m \mid 2015 - 42x$, (3 pont)
   így mivel $x = 3$ megoldás, az $m \mid 2015 - 42 \cdot 3 = 2015 - 126 = 1889$ oszthatóságnak kell teljesülnie. (3 pont)
   A legnagyobb olyan m számot keressük tehát, amire $m \mid 1889$ teljesül, azaz 1889 legnagyobb osztója a kérdésre a válasz. (2 pont)
   Ez pedig nem más, mint az $m = 1889$. (2 pont)