A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2014. 10. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

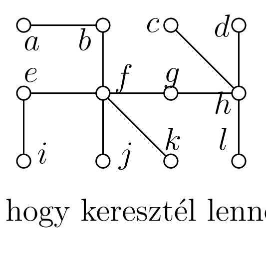
   A G gráfnak 10 csúcsa és 25 éle van, hiszen az élek az 5 páratlan szám mindegyikét az 5 páros szám mindegyikével kötik össze. (2 pont)
   A G minden C_4 részgráfjának csúcsai közül tehát pontosan kettő páros és kettő páratlan, (2 pont)
   ráadásul bárhogyan is választunk ki két páros és két páratlan számot, azok G-nek pontosan egy 4 hosszú köréhez tartoznak. (2 pont)
   Ezek szerint a keresett körök száma éppen annyi, ahányféleképp ki tudunk választani 5 páros és 5 páratlan számból két párosat és két páratlant. (2 pont)
   Mivel a döntéseink egymástól függetlenek, ezt pontosan $\binom{5}{2}^2 = 10 \cdot 10 = 100$-féleképp tehetjük meg. (2 pont)

2. Hányféleképpen lehet sorba rakni az $1, 2, \ldots, 10$ számokat úgy, hogy a sorozat valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.)

   Világos, hogy ha egy sorozat olyan, amilyet a feladat leír, akkor a két monoton részsorozatot elválasztó elem a sorba rakott számok közül a legnagyobb, azaz a 10 lesz. (2 pont)
   Az is világos, hogy a 10 előtti elemek növekvő, a 10 utáni elemek pedig csökkenő sorrendben következnek egymás után a sorozatban. (2 pont)
   Ezért minden ilyen sorozatot egyértelműen meghatároz a 10-et megelőző elemek H halmaza: (1 pont)
   a sorozat a H halmaz elemeinek növekvő sorrendjével kezdődik, a 10-zel folytatódik és a H komplementerének csökkenő sorrendben történő felsorolásával ér véget. (2 pont)
   Ezért a keresett sorozatok száma megegyezik a $\{1, 2, \ldots, 9\}$ halmaz részhalmazainak számával, (1 pont)
   ami 2^9, hisz a 9 elemről egymástól függetlenül döntünk, hogy bevegyük-e H-ba. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát 2^9. (1 pont)

3. Az ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c ill. a és e szomszédosak G-ben?

   Azt tanították, hogy a DFS fában nincs keresztél. (3 pont)
   Tehát ha a fa minden élét a gyökértől kifelé irányítjuk, akkor b és c ill. a és e egymás leszármazottai lesznek. (2 pont)
   Ezért a bejárás a fabeli ae útnak először az a vagy az e csúcsát, ill. a fabeli bc útnak először a b vagy a c csúcsát éri el. (1 pont)
   Így e két út unióján elsőnek elért csúcs csak a, e, b vagy c lehetnek. (1 pont)
   Ha e ez a csúcs, akkor a bc út elsőnek elért csúcsa f, ami lehetetlen. Ha b vagy c ez a csúcs, akkor az ae út elsőnek elért csúcsa nem a vagy e. Tehát a mélységi bejárás e két úton először az a csúcsot éri el. (2 pont)
   Azonban a csak az ae útról érhető el a fában, és a DFS innen nem érhette el. Ezért csakis a lehetett a bejárás kiindulópontja. (1 pont)

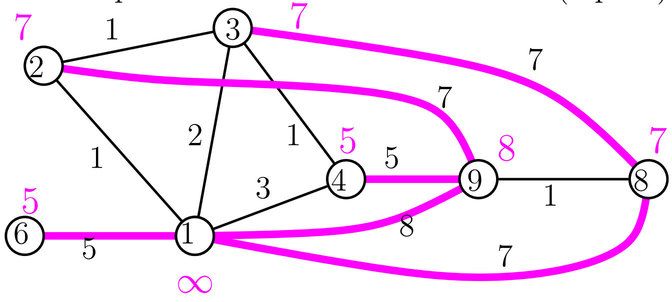
   

   Az is helyes megoldás, ha minden a-n kívüli x csúcsról konkrétan megmutatjuk, hogy keresztél lenne G-ben, ha x lenne a fa gyökere.

4. Legyenek a 7 csúcsú G gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és v_9, valamint akkor legyen v_i és v_j szomszédos, ha i és j relatív prímek. Ekkor a v_iv_j él szélessége $|i-j|$. Határozzunk meg a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat.

   A mellékelt ábrán látható a G gráf és az élek mentén a hosszaik. (4 pont)
   A Kruskal algoritmus órán tanult módosításával határozzuk meg a legszélesebb utak fáját, amikoris az éleket csökkenő szélességi sorrendben sorra véve mohón építünk feszítőfát. (4 pont)

   Az ábrán megvastagított élek alkotta feszítőfát kapjuk. Ha két csúcs között ezen a fán található út egy legszélesebb út a két csúcs között, ennek megfelelően az egyes csúcsok mellé írt számok a v_1-ből az egyes csúcsokba vezető legszélesebb út szélességét jelentik. (2 pont)



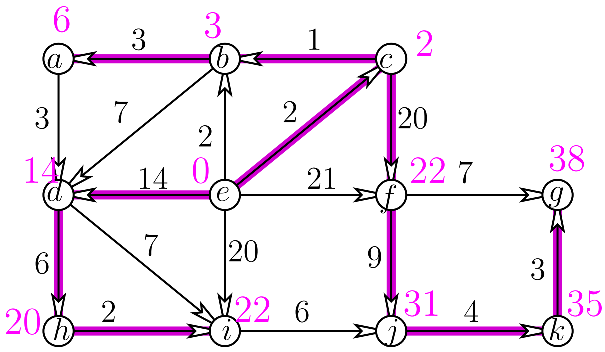
   Az utolsó 6 pont megszerezhető az irányított gráfokra tanult, de az irányítatlan gráfokon is működő módszer alkalmazásával is:

   Az órán tanult módosított Dijkstra algoritmust hajtjuk végre ezen a gráfon. Minden csúcsra nyilvántartunk egy alsó becslést az odavezető út szélességére, és mindig a KÉSZ halmazba bevett legutolsó csúcsból kiinduló élek mentén javítunk. (3 pont)
   Az ábrán minden csúcs mellett az odavezető út szélessége látható és a megvastagított élek alkotta fa pedig a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy legszélesebb utat tartalmaz. (3 pont)

   Az is teljes értékű megoldás, ha minden egyes v_1-től különböző csúcsra megad a megoldó egy konkrét utat **és arról be is bizonyítja, hogy legszélesebb**.

5. Határozzuk meg az itt látható PERT feladat minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket.

   A megadott gráf csúcsainak $e, c, b, a, d, h, i, f, j, k, g$ egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)
   Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk mindazokat az adott csúcsba befutó éleket, amelyek miatt az adott tevékenység nem kezdődhet a megállapított időpontnál hamarabb. (3 pont)



   Az adódott, hogy a feladatot legkorábban $t = 38$-ban lehet befejezni, mégpedig az $ecfjkg$ kritikus út miatt (más kritikus út nincs). Mivel pontosan a kritikus úton található tevékenységek a kritikusak, ezért a feladatbeli kérdés második részére a válasz e, c, f, j, k és g. (3 pont)

6. Tegyük fel, hogy a G gráf bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 7 élű út. Mutassuk meg, hogy ha G-nek van Euler sétája, akkor G-nek megduplázható legfeljebb 7 éle úgy, hogy az így kapott G' gráfnak Euler körsétája legyen. (Egy e él megduplázásán azt értjük, hogy behúzunk egy, az e éllel párhuzamos új élt.)

   Az órán tanult tétel értelmében elegendő azt igazolnunk, hogy alkalmasan választott legfeljebb 7 él megduplázása után a kapott G' gráf összefüggő lesz, és minden csúcsának fokszáma páros. (2 pont)
   Mivel G összefüggő, hisz bármely két csúcsa közt vezet legfeljebb 7 élű út, ezért bármely, a fenti módon konstruált G' is összefüggő. (2 pont)
   Ha G-nek van Euler körsétája, akkor semmi tennivalónk: a $G' = G$ gráf megfelel. (1 pont)
   Ha azonban G-nek nincs Euler körsétája, akkor G Euler sétájának u és v végpontjai különbözők. (1 pont)
   Ráadásul G-ben u-n és v-n kívül minden csúcs fokszáma páros, míg $d(u)$ és $d(v)$ páratlan. (1 pont)
   A feladat feltételeiből tudjuk, hogy u és v között vezet G-ben egy legfeljebb 7 élből álló út. (1 pont)
   Ezen út éleit megduplázva a kapott G' gráfban minden csúcs fokszáma páros lesz, így az első megjegyzésünk értelmében az ily módon kapott G' mutatja a feladatbeli állítás igazságát. (2 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2014. 11. 27.)

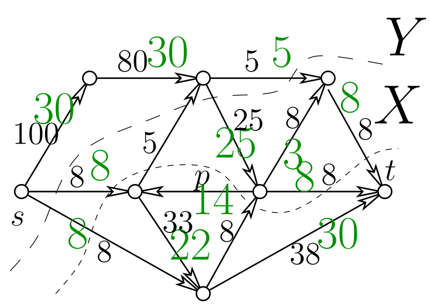
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

   A G kiszínezéséhez 4 szín elegendő, hiszen a 7 hosszú körre elég 3 szín, a további csúcsok pedig megkaphatják a negyedik színt. (4 pont)
   Megmutatjuk, hogy 3 szín nem elég G csúcsainak kiszínezésére. Tegyük fel indirekt, hogy G csúcsait sikerült 3 színnel színezni. (2 pont)
   A C_7 kör nem páros gráf, ezért csúcsainak színezéséhez szükség van 3 színre. (1 pont)
   Van tehát 3 különböző színű pontja, mondjuk a, b és c. Valamelyik új csúcsnak (mondjuk x-nek) pontosan e három csúcs a szomszédja, ezért x nem kaphatja a 3 rendelkezésre álló szín valamelyikét, ellentmondás. (2 pont)
   A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy 3 szín nem elég G csúcsainak kiszínezéséhez, tehát $\chi(G) = 4$. (1 pont)

2. Határozzuk meg a nemnegatív p paraméter összes olyan értékét, melyre a fenti hálózatban a maximális st-folyam nagysága (értéke) a lehető legnagyobb.

   Először $p = 0$-ra keresünk egy maximális nagyságú folyamot az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Ekkor egy 16 nagyságú folyamot kapunk, és egy annak maximalitását bizonyító, a sűrűn szaggatott vonallal jelzett, X által indukált, $32 + p$ kapacitású st-vágást. (2 pont)
   Most $p = \infty$ választással tovább növelve a folyamot, az ábrán látható, 46 nagyságú folyamot kapjuk, (1 pont)
   amelynek maximalitását a ritkán szagatott vonallal jelzett, Y által indukált, 46 kapacitású st-vágás bizonyítja. Ez az st-vágás nem tartalmazza a p kapacitású élt. (2 pont)
   Ezek szerint bármekkorának is választjuk p értékét, 46-nál nagyobb st-folyam nem lehetséges a hálózatban. (1 pont)
   A 46 nagyságú st-folyam elérhető, az pl. az ábrán látható módon. (1 pont)
   A $32+p$ kapacitású vágás miatt ehhez p értékét legalább $46-32 = 14$-nek kell választani. (1 pont)
   A $p = 14$ választás mellett elérhető a 46 nagyságú folyam, pl az ábrán megadott módon. (1 pont)
   A válasz tehát $p \geq 14$. (1 pont)



3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét, azaz a G-t lefogó pontok minimális számát.

   A G gráf egy lefogó élekből álló független élhalmaz definíció szerint a G egy teljes párosítása. (3 pont)
   Mivel G-nek 88 csúcsa van, ezért ez az élhalmaz 44 élből áll, (2 pont)
   vagyis G-ben a független élek maximális száma $\nu(G) = 44$. (2 pont)
   A G gráf páros, ezért Kőnig tanult tétele szerint $\tau(G) = \nu(G) = 44$. (3 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$.

Legyen $X := A \setminus N(Y)$. (3 pont)

Mivel Y-nak egyetlen szomszédja sincs X-ben, ezért X-nek sincs szomszédja Y-ban, azaz $N(X) \subseteq B \setminus Y$. (3 pont)

Az X halmaz mérete $|X| = |A| - |N(Y)| = 28 - 12 = 16$, míg $|B \setminus Y| = |B| - |Y| = 33 - 18 = 15$. (2 pont)

Ezek szerint $|N(X)| \leq |B \setminus Y| = 15 < 16 = |X|$, tehát X-re csakugyan nem teljesül a feladatban idézett Hall feltétel. (2 pont)

Avagy.

A Hall tétel szerint pontosan akkor teljesül A-ra a Hall feltétel, ha G-nek van A-t fedő párosítása. (3 pont)

Azt kell tehát igazolnunk, hogy G-nek nincs A-t fedő párosítása, más szóval, hogy $\nu(G) < 28$. (2 pont)

Tekintsük G egy maximális ($\nu(G)$ méretű) M párosítását. Mivel a B színosztály 18 pontú Y részhalmazának csak 12 szomszédja van, ezért M az Y-nak legfeljebb 12 pontját fedheti, (2 pont)

azaz Y-nak legalább 6 pontja fedetlen. (1 pont)

Így B-nek is legalább 6 pontját nem fedi M, (1 pont)

tehát $|M| \leq |B| - 6 = 27$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

5. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és G két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G-t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket?

Azt kell eldöntenünk, hogy a kérdéses G gráf síkbarajzolható-e. (1 pont)

A konstrukció folytán G egyszerű, (1 pont)

így ha G síkbarajzolható, akkor a tanult tétel értelmében legfeljebb $3n - 6$ éle lehet, ahol n a G csúcsainak száma. (4 pont)

(Persze az is kell, ehhez, hogy $n \geq 3$, de ez következik a legalább 6-os fokszámokból.) (0 pont)

Mivel G-nek minden fokszáma legalább 6, ezért G csúcsainak fokszámösszege legalább $6n$, vagyis G-nek legalább $3n$ éle van. (3 pont)

Ez pedig a fentiek alapján ellentmond annak, hogy G síkbarajzolható, (1 pont)

vagyis nem várthatjuk a hivataltól a bűnözők megregulázását. (1 pont)

A példa ereteti megszövegezése alkalmas lehetett arra, hogy a közigazgatás, az adóigazgatás csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Ezért ezúton elnézést kérünk.

6. Oldjuk meg a $7x \equiv 8 \pmod{177}$ lineáris kongruenciát.

Mivel 7 és 177 relatív prímek, ezért a kongruencia megoldható, és a megoldások halmaza egy modulo 177 maradékosztály. (2 pont)

A megoldás során az előadáson megbeszéltek értelmében eltekintünk a mod karaktersorozat kiírogatásától. Egészítsük ki a $7x \equiv 8(177)$ lineáris kongruenciát a triviális $177x \equiv 0(177)$ kongruenciával. A kapott kongruenciarendszer megoldásai pontosan azok az x egészek lesznek, melyek megoldják az eredeti kongruenciát. (2 pont)

A második kongruenciát helyettesítjük azzal, amit úgy kapunk, hogy a másodikból kivonjuk az első 25-szörösét: $177x - 175x = 0 - 200(177)$. (2 pont)

Ez utóbbi kongruenciában a -200-at vele kongruenssel helyettesítva az alábbi kongruenciarendszer adódik: $7x \equiv 8(177)$ ill $2x \equiv -23(177)$. (1 pont)

A második kongruencia 3-szorosát az elsőből kivonva azt kapjuk, hogy $x = 7x - 6x \equiv 8 - 3 \cdot (-23) = 77(177)$, (2 pont)

tehát a kongruencia megoldása $x \equiv 77(177)$. (1 pont)

(Ha most ez utóbbi kongruencia kétszeresét kivonnánk a $2x \equiv 23(177)$ kongruenciából, akkor a $0x \equiv -23 - 2 \cdot 77 = -177 \equiv 0(177)$ adódna, de erre nincs szükség az első megjegyzés miatt.)

Természetesen a lineáris kongruencia megoldható más, a fentitől eltérő módszerrel is, és a helyesen alkalmazott helyes módszer szerint megkapott helyes végeredmény értelemszerűen 10 pontot ér.

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2014. 12. 08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A $*****$-XXXXX focimeccs végeredménye 6 : 3 lett XXXXX csapatának javára. Hányféleképpen születhetett meg ez az eredmény, azaz hányféle lehetett az egyes gólok utáni állások sorrendje?

   A gólok sorrendjét egy olyan 9 hosszú sorozat írja le, melyben 3 db „$*$” és 6 db „X” szerepel. (3 pont)
   Ráadásul minden ilyen sorozat leírja a gólok egy lehetséges sorrendjét. (2 pont)
   Pontosan annyiféleképp születhetett meg tehát a végeredmény, amennyi az ilyen tulajdonságú sorozatok száma. (2 pont)
   Az ilyen sorozatok ismétléses permutációt alkotnak, (1 pont)
   így a tanult képlet szerint a számuk $\frac{9!}{3!\cdot 6!}$, (1 pont)
   ez tehát a feladat kérdésére is a válasz. (1 pont)

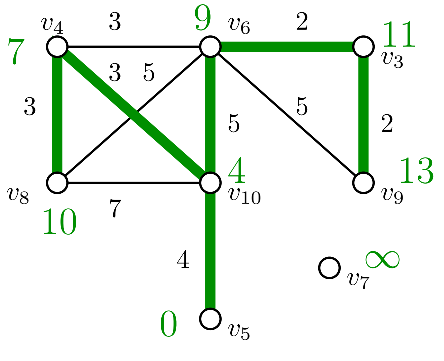
   Az is épp ilyen jól meghatározza a gólok sorrendjét, ha megmondjuk, hogy a 9 rúgott gól közül melyik 3-at rúgta $*****$**, és így binomiális együtthatóként jön ki a $\binom{9}{3}$ válasz.

2. Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű.

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy mégiscsak létezik egy 6 pontú, egyszerű G gráf a feladatbeli fokszámsorozattal. (2 pont)
   Ekkor mindkét 5-ödfokú csúcs minden más csúccsal össze van kötve (3 pont)
   tehát a három másodfokú csúcs mindegyike csak a két ötödfokú csúccsal szomszédos, (2 pont)
   a negyedfokúval nem. (1 pont)
   A negyedfokú csúcsnak tehát csak a két ötödfokú csúcs lehet a szomszédja, ami ellentmond G egyszerűségének. A kapott ellentmondás pedig az indirekt feltevés helytelenségét, azaz a feladat állítását igazolja. (2 pont)

3. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_iv_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a v_iv_j él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van.

   A $[3, 10]$ intervallumban két szám pontosan akkor nem relatív prím, ha mindkettő osztható a $2, 3$ vagy 5 prímek valamelyikével. (1 pont)
   Ezért G a v_4, v_6, v_8, v_{10} ill. v_3, v_6, v_9 valamint a v_5, v_{10} klikkek uniója, v_7 pedig izolált pont. (2 pont)
   A mellékelt ábra a G gráfot és az élhosszokat mutatja. (1 pont)
   Az órán tanult Dijksta algoritmust alkalmazva ($U = \{v_5\}$-ből kiindulva, élmenti javításokkal, és az U halmazhoz pontok $\{v_{10}, v_4, v_6, v_8, v_3, v_9\}$ sorrendben történő hozzávételével) meghatározhatjuk minden csúcs v_5-től való távolságát, és a legrövidebb utak fáját. (4 pont)
   A v_5-től mért távolságokat a csúcsok mellé írt számok jelzik, a legrövidebb utak fájának élei pedig meg lettek vastagítva. Ha tehát v_5-ből egy másik csúcsba szeretnénk legrövidebb úton eljutni, akkor a megvastagított faélek mentén érdemes haladnunk. (2 pont)



4. Az ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben?

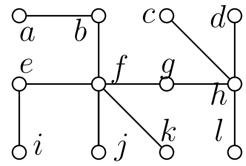
Azt tanították, hogy G minden csúcsának a gyökértől való távolsága ugyanannyi a BFS fában mint G-ben. (3 pont)

Az is igaz továbbá, hogy ha két csúcs szomszédos G-ben, akkor a gyökértől való távolságuk legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. (2 pont)

Mivel b és c szomszédosak G-ben, ezért b-t a gyökérrel összekötő fabeli út hossza legfeljebb 1-gyel tér el a c-t a gyökérrel összsekötő fabeli út hosszától. (2 pont)

Tehát a mellékelt BFS fán a BFS bejárás kiindulási csúcsának távolsága b-től és c-től legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Márpedig minden g-től különböző csúcsra e két távolság különbsége legalább 2, (2 pont)

így a BFS bejárás kezdőcsúcsa csakis g lehetett. (1 pont)



5. Igaz-e, hogy minden aciklikus, irányított G gráf csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?

   Az állítás nem igaz, és ehhez elegendő egyetlen aciklikus, irányított gráfot mutatni, amelynek a csúcsai egynél többféleképp is topologikus sorrendbe rendezhetők. (4 pont)

   Legyen a G gráfnak két csúcsa (u és v) és 0 éle. Ekkor G aciklikus irányított gráf, és u, v ill. v, u is topologikus sorrend. (5 pont)

   A G gráf csúcsainak tehát nem pontosan egy topologikus sorrendje van, a feladatban megfogalmazott állítás ezért nem igaz. (1 pont)

   Lehet éppenséggel kevésbé triviális ellenpéldát is mutatni, az éppúgy jó.

6. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.

   A Dirac tétel miatt G-nek van egy C Hamilton köre, hiszen G midnen fokszáma legalább a pontok számának fele, azaz 10. (3 pont)

   Ha most C éleit elhagyjuk G-ből, akkor az így kapott $G - C$ gráfban minden fokszám legalább 10 lesz. (3 pont)

   Ismét teljesül tehát a Dirac-feltétel, így Dirac tétele szerint $G - C$-nek is van Hamilton köre, mondjuk C'. (3 pont)

   A konstrukció folytán a G gráf C és C' Hamilton köreinek nincs közös éle, ez pedig igazolja a feladatban kimondott állítást. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2014. 12. 08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 77 pontja van, független pontjainak maximális száma pedig $\alpha(G) = 19$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \geq 5$ teljesül G kromatikus számára.

   Indirekt tegyük fel, hogy a G gráfot ki tudtuk színezni legfeljebb 4 színnel. Az azonos színűre színezett csúcsok (azaz a színosztályok) független ponthalmazok, hisz azonos színű pontokat nem köt össze él. (3 pont)

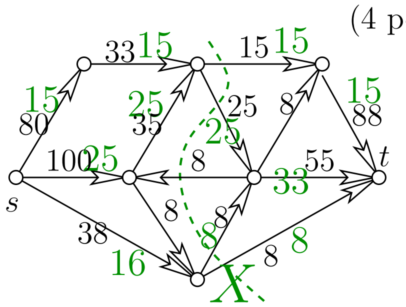
   Mivel $\alpha(G) = 19$, ezért egyetlen független ponthalmaznak, így egyetlen színosztálynak sem lehet 19-nél több pontja. (3 pont)

   A G gráfnak tehát legfeljebb $4 \cdot 19 = 76$ pontja lehet. (2 pont)

   Ez ellentmond annak, hogy G-nek 77 pontja van, és ez az indirekt feltevés helytelenségét, azaz a $\chi(G) \geq 5$ egyenlőtlenséget igazolja. (2 pont)

2. Találjunk az ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 56 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (zölddel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)

   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 56 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 56 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 56, mi pedig találtunk egy pontosan 56 kapacitású st-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonall jelzett st-vágás valóban minimális kapacitású. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágást, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.

   Mivel G páros, ezért G-nek nincs hurokéle, így Gallai idevágó tétele szerint $44+\tau(G) = \alpha(G)+\tau(G) = |V(G)| = 88$. (3 pont)

   A G gráfra Kőnig tétele is érvényes, így $\nu(G) = \tau(G) = 88 - 44 = 44$. (3 pont)

   Ha egy 88 pontú gráfban $\nu(G) = 44$, akkor G-nek van teljes párosítása, (1 pont)

   így a Frobenius tétel szerint a G gráf A színosztályára teljesülnie kell a feladatban szerencsére helyesen felírt Hall feltételnek. (3 pont)

   Igazából egyik fent használt tételre sincs szükség.

   A G mindkét színosztálya független ponthalmaz, ezért G nagyobbik színosztálya legalább 44 pontú, azaz $\alpha(G) \geq 44$. Mivel $\alpha(G) = 44$, ezért G mindkét színosztályában pontosan 44 csúcs található: $|A| = |B| = 44$. (2 pont)

   Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy $|X| > |N(X)|$ teljesül valamely $X \subseteq A$ ponthalmazra. (1 pont)

   Ekkor X-ből nem fut él a $B \setminus N(X)$ halmaz egyetlen pontjába sem (2 pont)

ezért $X \cup (B \setminus N(X))$ független ponthalmaz. (2 pont)
Ám ekkor $\alpha(G) \geq |X \cup (B \setminus N(X))| =$ (1 pont)
$= |X| + |B \setminus N(X)| = |X| + |B| - |N(X))| = |X| + 44 - |N(X)| > 44,$ (1 pont)
ami ellentmond az $\alpha(G) = 44$ feltevésnek, így igazolja az indirekt feltevés hamis voltát, tehát a feladat állítása csakugyan igaz. (1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú.

Elegendő az állítást összefüggő gráfokra igazolni, hiszen ha G minden komponensére igaz, hogy az adott komponens csúcsainak legfeljebb a felének a fokszáma nagyobb 10-nél, akkor ugyanez az egész G gráfra is teljesül. Feltehetjük tehát, hogy G összefüggő, és legalább 12 csúcsú, hisz ellenkező esetben G-nek egyetlenegy legalább 11 fokú pontja sincs. (1 pont)
Legyenek tehát n, t és e a G szokásos paraméterei, és jelölje m a G legalább 11-edfokú csúcsainak számát. Az Euler formula miatt $n + t = e + 2$. (3 pont)
A fokszámok összege a kétszeres élszám, ezért $2e \geq 11m + (n - m)$, azaz $2e \geq 10m + n$, hiszen m csúcs fokszáma legalább 11, és a maradék $(n - m)$-é pedig legalább 1. (2 pont)
Minden él 2 tartományt határol, és minden tartományt legalább 3 él határol, ezért $2e \geq 3t$ (2 pont)
A fentiek szerint tehát, $6n + 4e \geq 6n + 6t = 6e + 6$, azaz $6n \geq 2e + 6 \geq 10m + n + 6$, ahonnan $5n \geq 10m + 6 > 10m$ adódik, más szóval $n > 2m$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

5. Hány pozitív osztója van 10!-nak?

Azt tanították az órán, hogy ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor n pozitív osztóinak száma $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$. (3 pont)
A cél tehát 10! kanonikus alakjának meghatározása. Ezt a kanonikus alakot megkaphatjuk úgy is, hogy összeszorozzuk az $1, 2, \ldots, 10$ számok kanonikus alakjait. (2 pont)
Mivel ez utóbbi kanonikus alakokban csak a $2, 3, 5$ és 7 prímek szerepelnek, ezért csupán ezen prímek kitevőit kell meghatároznunk. (1 pont)
A 2 kitevője $5 + 2 + 1 = 8$ az 5 db páros, 2 db néggyel osztható és 1 db nyolccal osztható tényező miatt. A 3 kitevője $3 + 1 = 4$ a 3 db 3-mal osztható és 1 db 9-cel osztható tényező miatt. Az 5 kitevője 2, hisz 5 és 10 osztható 5-tel a tíz tenyezőből. Végül az egyetlen 7-tel osztható tényező a 7, tehát $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. (3 pont)
A pozitív osztók számára vonatkozó képlet alapján tehát $d(10!) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$. (1 pont)

6. Oldjuk meg a $17x \equiv 8 \pmod{177}$ lineáris kongruenciát.

Mivel 17 és 177 relatív prímek, ezért a kongruencia megoldható, és a megoldások halmaza egy modulo 177 maradékosztály. (2 pont)
A megoldás során az előadáson megbeszéltek értelmében eltekintünk a mod karaktersorozat kiírogatásától. Egészítsük ki a $17x \equiv 8(177)$ lineáris kongruenciát a triviális $177x \equiv 0(177)$ kongruenciával. A kapott kongruenciarendszer megoldásai pontosan azok az x egészek lesznek, melyek megoldják az eredeti kongruenciát. (2 pont)
A második kongruenciát helyettesítjük azzal, amit úgy kapunk, hogy a másodikból kivonjuk az első 10-szeresét: $7x = 177x - 170x = 0 - 80(177)$. (2 pont)
Így az alábbi kongruenciarendszer adódik: $17x \equiv 8(177)$ ill $7x \equiv -80(177)$. (1 pont)
A második kongruencia 2-szeresét az elsőből kivonva azt kapjuk, hogy $3x = 17x - 14x \equiv 8 - 2 \cdot (-80) = 168(177)$, vagyis a $7x \equiv -80(177)$, $3x \equiv -9(177)$ rendszer adódik. Most az első konruenciából vonjuk ki a második kétszeresét: $x = 7x - 2 \cdot 3x \equiv -80 - 2 \cdot (-9) = -62(177)$, (2 pont)
tehát a kongruencia megoldása $x \equiv 115(177)$. (1 pont)
(Ha most ez utóbbi kongruencia háromszorosát kivonnánk a $3x \equiv 15(177)$ kongruenciából, akkor a $0x \equiv -9 - 3 \cdot 115 = -354 \equiv 0(177)$ adódna, de erre nincs szükség az első megjegyzés miatt.)

Természetesen a lineáris kongruencia megoldható más, a fentitől eltérő módszerrel is, és a helyesen alkalmazott helyes módszer szerint megkapott helyes végeredmény természetesen 10 pontot ér.