

A Számítástudomány alapjai

1. ZH 2011. X. 13. 8¹⁵

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét** és a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Feladatok

1. A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként 1, 3, 5, 7 és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriáink kapacitásainak összegének testvérünkéiéinél mindenképpen nagyobbak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

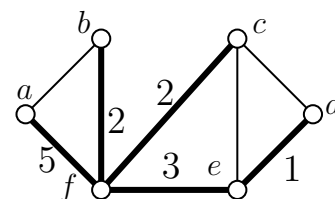
2. Rajzoljuk le azt a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját), aminek szomszédossági mátrixa

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legkevesebb hány élt kell G -be behúzni az egyszerűség megtartásával úgy, hogy reguláris gráfot kapjunk?

3. Tekintsük az $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$, $(4, 3, 2, 7, 6, 5, 9, 8)$ és $(1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8)$ Prüfer-kódú fákat. Alkossák a G gráf élhalmazát ezen fák élei azzal, hogy ha két csúc k fában szomszédos, akkor G -ben az adott élnek k párhuzamos példánya található. Van-e G -nek Euler-köre?

4. Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G -nek.



5. Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány éle van F komplementerének?

6. Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található K_{16} -nak Hamilton köre.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

2. ZH 2011. XI. 24. 8¹⁵

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét**a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.

Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

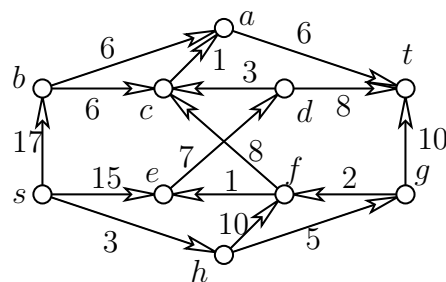
1. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \dots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27” csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27” csúctól való távolságát.

2. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefogó élhalmazok közül egy minimális összkapacitásút.

3. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

4. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G -nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.



6. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n - 1) + \sigma(n + 1) \geq 3n + 6$ teljesül.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

A Számítástudomány alapjai

ELSŐ pótZH 2011. XII. 1. 8¹⁵

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét**a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.

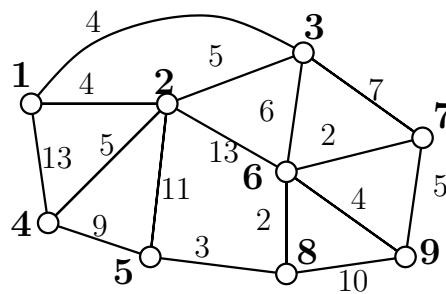
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Hányféleképpen lehet tombolán kisorsolni 5 különböző nyereményt 3 résztvevő között? Hány olyan sorsolás van, ahol minden résztvevő legalább egy nyereményt kap? (Két sorsolás akkor különbözik, ha van olyan nyereménytárgy, amit a két sorsoláson nem ugyanaz nyer meg.)
2. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban 3 – 3 olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat?
3. Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$



Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

4. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és hatodfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_6 . Igazoljuk, hogy $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$.
5. Keressük meg a fenti mátrix melletti ábrán látható gráf egy minimális súlyú feszítőfáját és adjuk meg a Prüfer-kódját.
6. Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G -nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a \overline{G} komplementergráfnak is van Euler-köre.

A Számítástudomány alapjai

MÁSODIK pótZH 2011. XII. 1. 8¹⁵

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

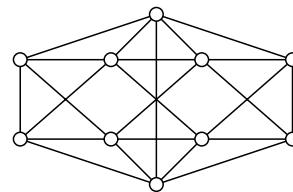
Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét**a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.

Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a $v_i v_j$ él hossza legyen $l(v_i v_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a $v_7 v_8$ él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?
2. A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G -nek nincs. Ha a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12} -ből v_{16} -ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15} v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyam nagyság elérhető?
3. Tekintsük a k -szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$ -szeresen összefüggő.
4. Tegyük fel hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?
5. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?
6. Számítsuk ki a $10! + 99$ és $9! + 9$ számok legnagyobb közös osztóját.



Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

ELSŐ ZH pótlása 2011. XII. 14. 10⁰⁰

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.

Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

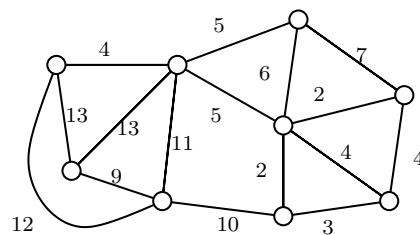
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. A 174 fős villamosmérnök-évfolyam hallgatói 4-féle tárgyat hallgatnak, mindegyiket ugyanannyian vették fel, minden hallgató felvett legalább egy tárgyat. Senki sincs, aki mind a négy tárgyat felvette, de bármely három tárgyhoz pontosan egy olyan hallgató van, aki azok mindegyikére jár. Ezen kívül bárhogy is választunk két tárgyat a négyből, pontosan 5 olyan hallgató van, aki mindkettőt felvette. Hány villamosmérnök-hallgató jár az egyes kurzusokra?
2. Hét villamosmérnök-hallgatóról tudjuk, hogy közülük bármely kettőnek van közös beszédtemája, mégpedig 3 lehetséges téma (táplálkozás, hardware, ellentétes nem) valamelyike. (Lehetséges pl, hogy a és b ill. a és c témája megegyezik, de különbözik b és c közös témájától.) Igazoljuk, hogy kiválasztható a 7 hallgató közül néhány (de legalább 3) olyan, akik körbeülhetnek úgy egy kerek asztalt, hogy az egymás mellett ülőknek ugyanaz legyen a közös témájuk.
3. Összefüggő-e az a G gráf, aminek a szomszédossági mátrixa az alábbi?

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Legyen F az ábrán látható G gráf egy minimális súlyú feszítőfájának élhalmaza. Van-e a $G - F$ gráfnak Euler-köre?
5. Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G - C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.
6. Legyen G a $(2, 3, 7, 2, 4, 3, 3, 2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G -nek Hamilton-köre?



Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

MÁSODIK ZH pótlása 2011. XII. 14. 10⁰⁰

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.

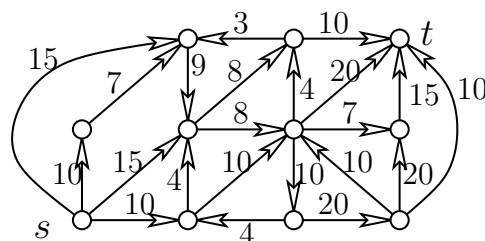
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

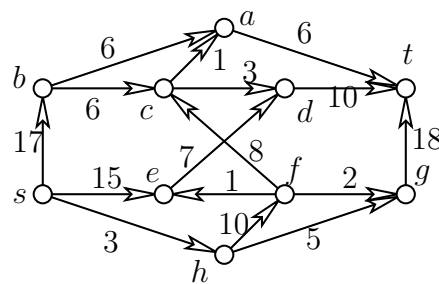
- Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{11, 14, 15, 35, 66\}$, él pedig akkor fusson két csúcst között, ha azok relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Határozzuk meg G -nek egy a „15” csúcsból indított szélességi bejárásához tartozó fáját! A G' gráfot úgy kaptuk, hogy G -hez hozzávettünk egy új v csúcsot, amit G bizonyos csúcsaival összekötöttünk. Tudjuk, hogy G' -ben a 15 és v csúcsok távolsága 4. Határozzuk meg G' -t!

- Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható hálózatban a maximális st -folyam nagyságát.



- Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{(i+j)}{(i-j)} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.

- Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.



- Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a \overline{G} komplementergráf nem síkbarajzolható.
- Határozzuk meg, hogy a 3^{33} szám kettes számrendszerben felírt alakjának mi az utolsó hat jegye!

Jó munkát!