A Számítástudomány alapjai
1. ZH javítókulcs (2025. 11. 06.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e olyan F fa, amire az $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, x$ sorozat az F fokszámait adja meg növekvő sorrendben?

   Az F fának 12 csúcsa van, ezért a tanultak miatt az élszáma $|E(F)| = 12 - 1 = 11$. *(3 pont)*
   Az kézfogáslemma szerint F fokszámösszege az élszáma kétszerese, *(3 pont)*
   ezért $6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 + 4 + x = 2|E(G)| = 22$, *(1 pont)*
   ahonnan $19 + x = 22$ miatt $x = 3$ adódik. *(1 pont)*
   Mivel $x < 4$, a feladatban megadott fokszámok nem alkotnak növekedő sorozatot. *(1 pont)*
   Ezért nem létezik a megadott tulajdonságokkal rendelkező fa. *(1 pont)*

   Az első 3 pont után így is befejezhető a megoldás.

   Az órán tanult kézfogáslemma miatt tetszőleges véges gráf fokszámösszege páros, *(2 pont)*
   ezért x páratlan, *(1 pont)*
   és a fokszámsorozat növekedő tulajdonsága miatt $x \geq 5$. *(1 pont)*
   Ennek megfelelően F csúcsainak fokszámösszege legalább $6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 24$. *(1 pont)*
   A KFL miatt a fokszámösszeg az élszám kétszerese, azaz $|E(F)| \geq 24/2 = 12$, *(1 pont)*
   ami ellentmond a korábbi $|E(F)| = 11$ megállapításnak. A kapott ellentmondás igazolja, hogy nem létezik a faladatban leírt tuljadonságokkal rendelkező F fa. *(1 pont)*

   Ha egy megoldó csak annyit tesz, hogy felrajzol egy, a feladatbeli fokszámsorozatot megvalósító fát, és megfigyeli, hogy azon $x = 3$, akkor az (legfeljebb) 1 pontot kapjon.

2. A jobb oldalt látható táblázat a Dijkstra-algoritmus G gráfon történő lefutása során dokumentálja az (r, ℓ)-felső becslés változását az algoritmus egyes fázisaiban.

   (a) Állapítsuk meg a táblázatból hiányzó értékeket!

   (b) Rajzoljuk le a megfelelő gyökérhez tartozó legrövidebb utak fáját, és írjuk a fa minden egyes éle mellé a megfelelő élhosszt!

a	b	c	d	e	f	g
??	??	??	??	??	??	??
∞	12	∞	0	∞	7	∞
17	12	∞	0	19	7	??
14	12	24	0	14	7	9
13	12	22	0	14	7	9
??	12	19	0	14	7	9
??	??	19	??	??	??	??

   A táblázat első sora a kiindulási (r, ℓ)-felső becslést tartalmazza, ami minden csúcsra ∞, kivéve a gyökeret, amire 0. *(1 pont)*
   Mivel a Dijkstra-algoritmus futása során egyetlen csúcsra vonatkozó felső becslés sem növekszik, ezért a gyökér az $r = d$ csúcs: az első sorban itt 0 áll, a többi helyen ∞. *(1 pont)*
   A Dijkstra-algoritmus minden egyes fázisában az a KÉSZ halmazon kívüli csúcs kerül a KÉSZ halmazba, amelyikre a nyilvántartott felső becsés a legkisebb. Ezeket a táblázatelemeket be fogjuk keretezni. *(1 pont)*

a	b	c	d	e	f	g
∞	∞	∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞
∞	12	∞	0	∞	$\boxed{7}$	∞
17	12	∞	0	19	7	$\boxed{9}$
14	$\boxed{12}$	24	0	14	7	9
$\boxed{13}$	12	22	0	14	7	9
13	12	19	0	$\boxed{14}$	7	9
13	**12**	$\boxed{19}$	**0**	**14**	**7**	**9**

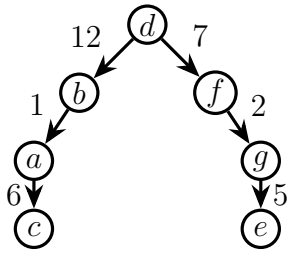
   Látható, hogy a 4. sor ismert legkisebb eleme kisebb, mint a 3. soré. Ez azt jelenti, hogy a 3. sorban nem a 12-t, hanem az ismeretlen elemet kell bekeretezni. Ez az elem pedig a második sorban a KÉSZ halmazba kerülő f csúcsból induló él mentén javult meg egy olyan értékre, ahonnan nem javult tovább. Ezért a 3. sor végén egy bekeretezett 9-es áll. *(2 pont)*
   A bekeretezett elemek KÉSZ halmazba kerülése után a megfelelő (d, ℓ)-felső becslés már nem változik,

így kitölthetjük a táblázat oszlopait és elvégezhetjük a további bekeretezéseket. *(1 pont)*

A legrövidebb utak fájának felrajzolásához minden, a gyökértől különböző v csúcsra megvizsgáljuk, hogy a v végső (d, ℓ)-felső becslése melyik u csúcs KÉSZ halmazba kerülését követően adódott. A legrövidebb utak fájában az u csúcsból vezet irányított él a v csúcsba, és ennek az élnek a hossza a két végső felsőbecslés-érték különbsége. *(2 pont)*

A mellékelt rajz az így kapott legrövidebb utak fáját ábrázolja. *(2 pont)*

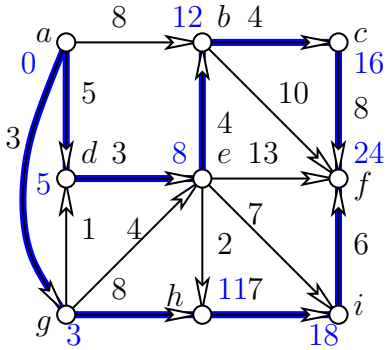
A feladat nem szólt arról, hogy irányított-e a gráf, így azt irányítatlannak értelmezzük. Ha netán valaki irányított gráffal dolgozott, azt is elfogadjuk.



3. Oldjuk meg a lenti ábrán bal oldalt látható PERT problémát: határozzuk meg minden tevékenység legkorábbi kezdési idejét, a teljes projekt mimimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket. Elérhető-e egyetlen él megfordításával, hogy olyan PERT problémát kapjunk, aminek a minimális végrehajtási ideje rövidebb az eredetiénél?

Az órán tanultak szerint dolgozunk. Iterált forrástörléssel (vagy más, alkalmas módon) megkeressük a problémát leíró gráf egy topologikus sorrendjét. A konkrét esetben az $a, g, d, e, b, c, h, i, f$ sorrendet kapjuk. *(1+1 pont)*

A kapott toplogikus sorrendben meghatározzuk minden egyes tevékenyég legkorábbi kezdési időpontját, és megjelöljük azt az élt (vagy azokat az éleket), amelyek miatt az adott részfeladat nem kezdődhet a számított időpontnál hamarabb. *(3 pont)*

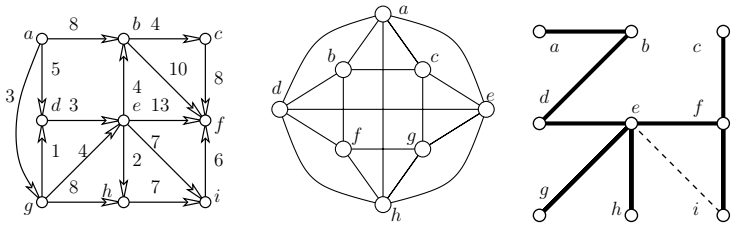


A teljes projekt legrövidebb végrehajtási ideje az imént kiszámított legkorábbi kezdési időpontok legnagyobbika, konkrétan 24. *(1 pont)*

A kritikus tevékenységek a kritikus (leghosszabb) utak mentén található tevékenységek. Két kritikus út van, ezek $adebcf$ és $aghif$, ezért minden tevékenység kritikus. *(2 pont)*

Bármelyik élt is fordítjuk meg a problémát leíró gráfban, az egyik kritikus úthoz nem nyúlunk. Ezért a kapott gráf leghosszabb útjának hossza (azaz a módosított probléma legkorábbi végrehajtási ideje) nem csökkenhet ezáltal. *(2 pont)*

4. Legyen G az alábbi ábrán szereplő második gráf. Előállítható-e G-ből két él törlésével, majd egy él behúzásával olyan **egyszerű** gráf, aminek van Euler-körsétája?



Az órán azt tanították, hogy véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van Euler-körsétája, ha ipeöf, *(1 pont)*

és minden fokszáma páros. *(1 pont)*

Vegyük észre, hogy ha töröljük az ad és ec éleket, majd behúzzuk a ch élt, akkor a hatodfokú h kivételével minden csúcs foka 4 lesz, és a gráf is összefüggő marad. *(7 pont)*

Az így kapott gráfnak van tehát Euler-körsétája: a feladat kérdésére igenlő a válasz. *(1 pont)*

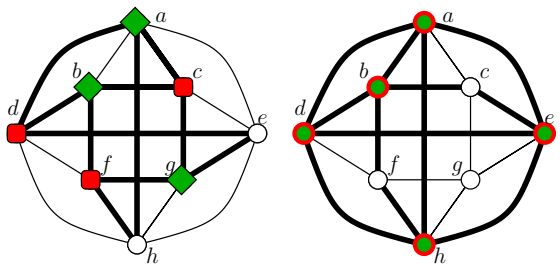
Ha valaki nem talál meg egy megfelelő éltörlés-élbehúzás kombinációt, az az első két pont mellett további részpontszámot szerezhet azzal, ha megfigyeli, hogy mik a páratlan fokú csúcsok (1 pontért), hogy egy éltörlés két csúcs fokszámának paritását változtatja (1 pontért), és, hogy élbehúzásra is hasonló igaz (újabb 1 pontért).

5. Legyen G a fenti ábrán szereplő második gráf. Síkbarajzolható-e a G gráf?

A jobb oldali ábra a G gráf egy topologikus $K_{3,3}$ ill. egy topologikus K_5 részgráfját mutatja. *(7 pont)*

Bármelyik említett részgráf cáfolja G síkbarajzolhatóságát. Ezért G nem síkbarajzolható. *(3 pont)*

Aki nem talál tiltott részgráfot, de kimondja a Kuratowski-tétel könnyű irányát, és látnivalóan megfelelő részgráfot keres, annak jár a második részben adható 3 pont.



$\boxed{\star}$ A fenti ábrán látható harmadik gráf megvastagított élei alkotják a 9-csúcsú G gráf egy BFS bejárása után kapott szélességi fáját. Tudjuk, hogy e és i szomszédosak G-ben. Határozzuk meg az a csúcs befejezési számát a fenti bejárásban!

Tanultuk, hogy irányítatlan gráf szélességi bejárása után a gráfnak nincs szintet ugró éle. *(2 pont)*
Ezért az BFS-fa gyökere (vagyis az elsőnek elért csúcs) csakis c vagy f lehet: bármely más gyökér esetén ugyanis ei szintet ugrana. Ha pedig c vagy f a gyökér, akkor az ei él szinten belül fut. *(2 pont)*
A szélességi bejárásra teljesül, hogy ha a csúcsokat az elérésük sorrendjében sorba rendezzük, akkor a csúcsokat a szélességi fa szintjei szerint soroljuk fel, mégpedig úgy, hogy a gyökérhez közelebbi szint bármely csúcsa megelőzi a gyökértől távolabbi szint bármely csúcsát. *(2 pont)*
Látható, hogy akár c, akár f a fa gyökere, a minden más csúcsnál távolabb van a gyökértől. *(1 pont)*
Ezért a az utolsónak elért csúcs. *(1 pont)*
Mivel szélességi bejárás esetén a csúcsok elérési és befejezési sorrendje megegyezik, *(1 pont)*
ezért a egyúttal az utolsónak befejezett csúcs is. Így a befejezési száma a G csúcsszámával egyezik meg, ami konkrétan 9. *(1 pont)*

Az első 4 pont így is megszerezhető: 2 pontért rámutatunk arra, hogy BFS után nincs előreél majd újabb 2 pontért arra, hogy ha nem c vagy f lenne a gyökér, akkor ei előreél lenne.