

A számítástudomány alapjai

A Kruskal-algoritmus helyessége

2025. szeptember 25.

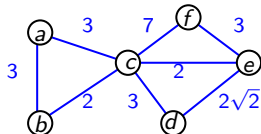
Kruskal-algoritmus emlékeztető

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

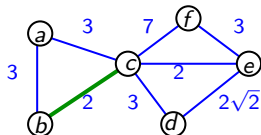


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

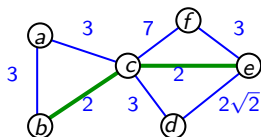


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

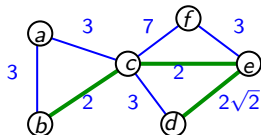


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

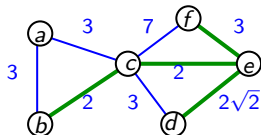


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

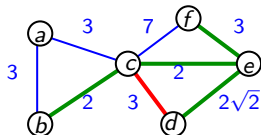


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

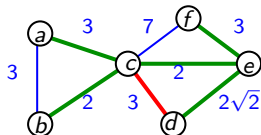


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

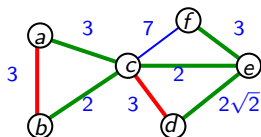


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

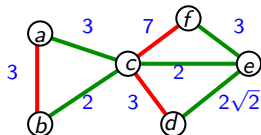


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető

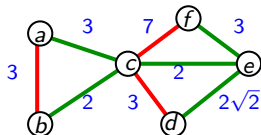


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus emlékeztető



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

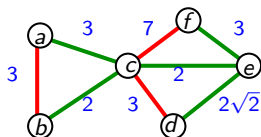
$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál.

Sőt: ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.

Jogos kérdés, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. min.ktg-ű feszítő erdőt) ad-e.

Kruskal-algoritmus emlékeztető



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv.

Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \dots, m$ -re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál.

Sőt: ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.

Jogos kérdés, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. min.ktg-ű feszítő erdőt) ad-e.

Most megadjuk erre a kérdésre a választ.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén. Ez egy rendkívül hasznos tulajdonság, érdemes neki nevet adni.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

Megj: Ha a legfeljebb c költségű éleket olcsónak hívjuk, akkor a c -feszítő tulajdonság azt jelenti, hogy az olcsó élek grájában feszítő erdőt alkotnak az F -beli olcsó élek. (Ha olyan szemüvegben néznénk a gráfra, amivel csak az olcsó éleket látjuk, akkor az általunk látott G -nek egy feszítő erdejét alkotná az, amit F -ből látunk.)

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c -feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

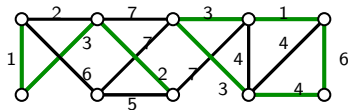
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c -feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

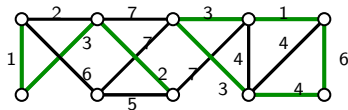
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c -feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Adott a fent látható G gráfban az F élhalmaz. Nézzünk rá a varázsszemüveggel!

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

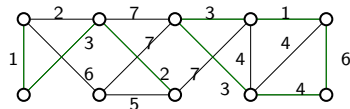
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\infty \leq 0$$

Példa: Adott a fent látható G gráfban az F élhalmaz. Nézzünk rá a varázsszemüveggel!

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

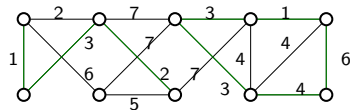
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\infty \leq 0$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

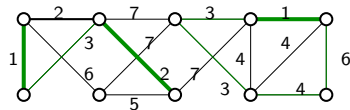
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\deg(v) \leq 2$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

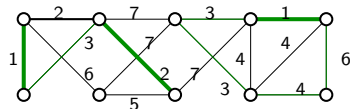
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\leq 2$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz. Az F élhalmaz nem 2-feszítő, mert az F -beli legfeljebb 2 költségű élek nem feszítik a G_2 gráf 4-pontú komponensét.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

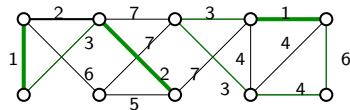
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\deg(v) \leq 2$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

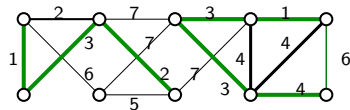
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\leq 4$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

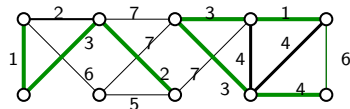
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\text{ciklus} \leq 4$$

Példa: Adott a fent látható G gráfban az F élhalmaz. Az F élhalmaz 4-feszítő, hisz az F -beli 4-nél nem drágább élek a G_4 gráf mindhárom komponensének egy-egy feszítőfáját alkotják.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

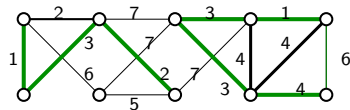
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\sum_{e \in F} k(e) \leq 4$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

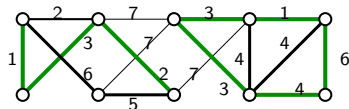
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\sum_{e \in F} k(e) \leq 6$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

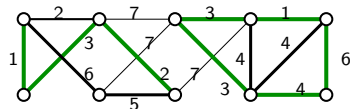
$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalma **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



$$\text{ciklus} \leq 6$$

Példa: Adott a fent

látható G gráfban az F élhalmaz. Az F élhalmaz nem 6-feszítő, u.i. a 6-nál nem drágább F -beli élek tartalmaznak kört, sőt, G_6 bal oldali komponensét sem feszítik.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c -feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G -nek:

$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F , akkor **$F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje** minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c -feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus F outputjára igaz, hogy

az F élhalmaz c -feszítő tulajdonságú minden $c > 0$ esetén. (*)

Igazoljuk, hogy a (*) tulajdonság karakterizálja a mkffákat: egyrészt minden mkffa élhalmaza (*) tulajdonságú, másrészt pedig minden (*) tulajdonságú halmaz mkffa élhalmaza.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Megj: A fenti Lemmában F szükségképpen feszítő erdő, hisz ha c minden fellépő élköltségnél nagyobb, akkor $E_c = E$ és $G_c = G$. Így $F \cap E_c = F \cap E = F$ a $G_c = G$ feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i) > k(f'_i) = c$. Ekkor $f_i, f_{i+1}, \dots \notin E_c \cap F$ ezért $|E_c \cap F| < i$. Az F c -feszítő tulajdonsága miatt $E_c \cap F$ a G_c egy olyan feszítő erdeje, ami i -nél kevesebb élt tartalmaz. Az $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$ élek is mind E_c -beliek, és többen vannak az $E_c \cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$ nem körmentes, így $f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell$ sem az. Az indirekt feltevés ellentmondásra vezetett. Ez azt jelenti, $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall i = 1, 2, \dots$ esetén. Ezért $\tilde{k}(F) = \sum_{i=1}^{\ell} k(f_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} k(f'_i) = \tilde{k}(F')$. □

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Láttuk, hogy ha F a Kruskal-algoritmus outputja, akkor egyrészt F feszítő erdő, másrészt pedig F c -feszítő tulajdonságú minden $c > 0$ esetén. Ezért a Lemma szerint $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. □

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek
 $\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek

$\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

Biz: $\Leftarrow$: Ha F' minden c -re tartalmazza G_c egy feszítő erdejét, akkor $c = \infty$ esetén ez azt jelenti, hogy $F' = F' \cap E_\infty$ a $G_\infty = G$ egy feszítő erdeje. A Lemma miatt F' költsége nem nagyobb G egyetlen feszítő erdejének költségénél sem. Ezért F' a G minimális költségű erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek

$\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

Biz:

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek

$\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

Biz: $\Rightarrow$: Indirekt. Tfh valamely $c > 0$ -ra $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c -nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel F c -feszítő tulajdonságú, ezért $|F' \cap E_c| < |F \cap E_c| =: i$. Így $k(f_i) < k(f'_i)$. Ráadásul a Lemma miatt $k(f_j) \leq k(f'_j) \forall j$. Így aztán $\tilde{k}(F) < \tilde{k}(F')$, tehát F' nem minimális költségű feszítő erdő. ζ $\square$

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek
 $\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek
 $\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c -feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$ -ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G -nek
 $\iff F'$ c -feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ -ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Megj: Összefüggő G gráf esetén a (2) következmény G minimális költségű feszítőfáinak karakterizációja.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezeése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendeze
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezezéséhez a buborékrendezezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.

(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendeze
 2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).
1. m szám sorbarendezezéséhez a buborékrendezezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
- (A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot m \cdot \log_2 n$ lépés.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:

Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.

A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendeze
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

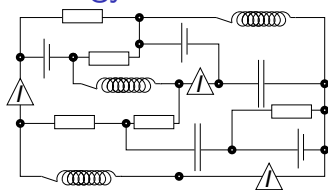
1. m szám sorbarendezezéséhez a buborékrendezezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.

(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot m \cdot \log_2 n$ lépés.

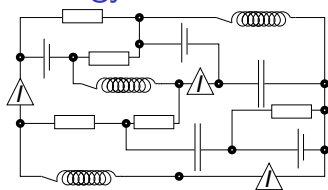
A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot m \cdot \log_2(n + m)$ -mel.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

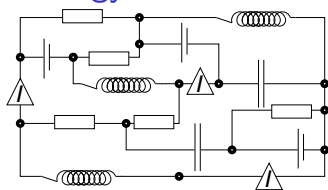
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

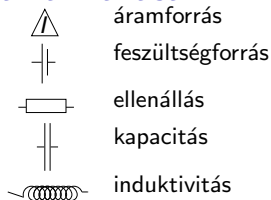
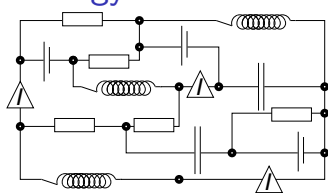


Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



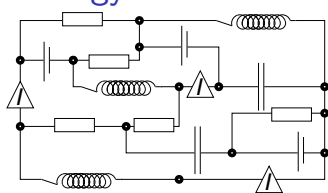
Tíh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Tf h egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

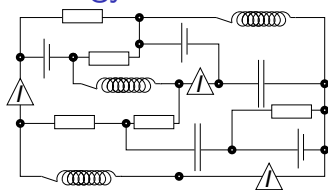
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

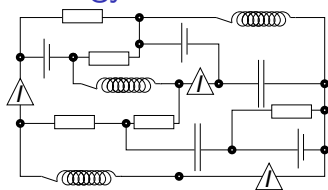
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

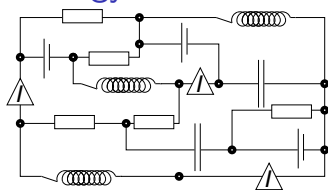
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Nem egyértelmű a megoldás pl akkor, ha G -ben van olyan kör, ami kizárólag feszültségforrásokat tartalmaz. (Ha u.i. a feszültségek előjeles összege nem 0, sérül a huroktörvény, így nincs megoldás. Ha pedig ez az összeg 0, akkor viszont nem egyértelmű a megoldás, hiszen bármely megoldásból kapható egy másik, ahol ezen kör mentén valamekkora plusz áramot körbeküldünk.)

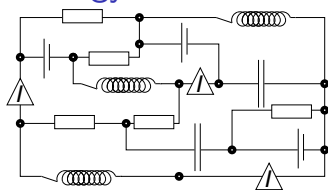
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

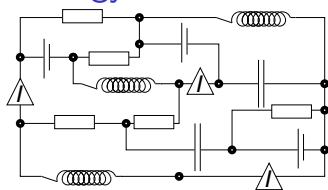
Mikfák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Nem egyértelmű a megoldás akkor sem, ha G csúcsai két részre oszthatók úgy, hogy a két rész közt futó éleken kizárólag áramforrások vannak. (Ha az áramok előjeles összege nem 0, akkor a csomóponti törvény sérül. Ha pedig 0, akkor bármely megoldásban az egyik rész potenciálját konstanssal megemelve egy másik megoldást kapnánk, tehát nem csak egy megoldás lenne.)

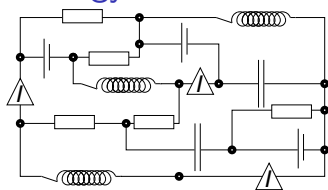
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

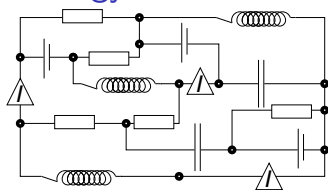
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a **normál fa**: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

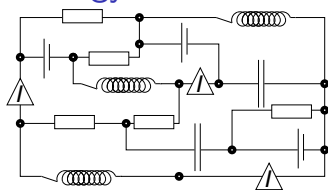


Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a **normál fa**: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

(Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírt hurok- ill. csomóponti törvények egyértelműen meg is határozzák a megoldást.)

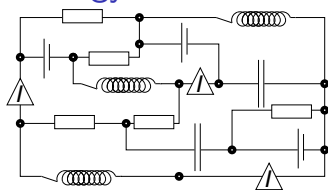
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a **normál fa**: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egvértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a **normál fa**: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltiségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa. A normál fa létezése esetén pedig egyértelmű a megoldás, és „értelmes” a hálózat.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- ▶ Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
(c -feszítő tulajdonság minden $c \geq 0$ esetén)

Mit tanultunk ma?

- ▶ Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
(c -feszítő tulajdonság minden $c \geq 0$ esetén)
- ▶ Kruskal-algoritmus helyessége, lépésszáma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
(c -feszítő tulajdonság minden $c \geq 0$ esetén)
- ▶ Kruskal-algoritmus helyessége, lépésszáma
- ▶ Normál fák és elektromos hálózatok kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- ▶ Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
(c -feszítő tulajdonság minden $c \geq 0$ esetén)
- ▶ Kruskal-algoritmus helyessége, lépésszáma
- ▶ Normál fák és elektromos hálózatok kapcsolata

Köszönöm a figyelmet!