

A számítástudomány alapjai

A gráfelmélet alapjai

2025. szeptember 9.

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 ill. 4 óra elmélet

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 ill. 4 óra elmélet

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 ill. 4 óra elmélet

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Segédanyagok: Előadások anyaga (pdf, videó, jegyzet)

Az előadás diásorok alapján készült Szása

Közös gyakorlat-feladatsor tudnivalók része

Katona-Recski-Szabó (nyomtatott/elektronikus) jegyzet

NESZ (régi tárgy saját digitális jegyzete, rég volt karbantartva)

Szeszlér BSz1 jegyzet (jól átgondolt, letölthető linalg jegyzet)

Letölthető linalg és gráfelmélet példatárak

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 ill. 4 óra elmélet

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Segédanyagok: Előadások anyaga (pdf, videó, jegyzet)

Az előadás diások alapján készült Szása

Közös gyakorlat-feladatsor tudnivalók része

Katona-Recski-Szabó (nyomtatott/elektronikus) jegyzet

NESZ (régi tárgy saját digitális jegyzete, rég volt karbantartva)

Szeszlér BSz1 jegyzet (jól átgondolt, letölthető linalg jegyzet)

Letölthető linalg és gráfelmélet példatárak

Extrák: Érdekes kiegészítő információk érdeklődőknek. Nem kérjük számon.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgara neptun-jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (A ZH-n számon nem kért anyagból is!).

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgara neptun-jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (A ZH-n számon nem kért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgara neptun-jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (A ZH-n számon nem kért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Konverzió:

$\geq$	0	40	55	70	85
vp	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
$<$	40	55	70	85	101

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(XI.6, 24, I.6), 2.ZH(XII.4, 17, I.6)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

ppZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgara neptun-jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (A ZH-n számon nem kért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Konverzió:

$\geq$	0	40	55	70	85
vp	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
$<$	40	55	70	85	101

Ismétlő/javító vizsga: a szabad vizsgaidőpontok függvényében.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ A jövő hét csütörtöki előadás idejében (18-dikán) Digit lesz. A harmadik szorgalmi hét csütörtökén (25-dikén) pedig Digit helyett SzA lesz.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ A jövő hét csütörtöki előadás idejében (18-dikán) Digit lesz. A harmadik szorgalmi hét csütörtökén (25-dikén) pedig Digit helyett SzA lesz.
- ▶ Szept 17-dikén az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ A jövő hét csütörtöki előadás idejében (18-dikán) Digit lesz. A harmadik szorgalmi hét csütörtökén (25-dikén) pedig Digit helyett SzA lesz.
- ▶ Szept 17-dikén az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ Az első két gyakorlaton az első előadás anyagát gyakoroljuk.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ A jövő hét csütörtöki előadás idejében (18-dikán) Digit lesz. A harmadik szorgalmi hét csütörtökén (25-dikén) pedig Digit helyett SzA lesz.
- ▶ Szept 17-dikén az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ Az első két gyakorlaton az első előadás anyagát gyakoroljuk.
- ▶ Az ötödik heti előadás szintén elmarad, ezen a héten az előző csütörtöki előadás anyagát fogjuk gyakorolni.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő hét keddi (szept 16-diki) előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ A jövő hét csütörtöki előadás idejében (18-dikán) Digit lesz. A harmadik szorgalmi hét csütörtökén (25-dikén) pedig Digit helyett SzA lesz.
- ▶ Szept 17-dikén az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ Az első két gyakorlaton az első előadás anyagát gyakoroljuk.
- ▶ Az ötödik heti előadás szintén elmarad, ezen a héten az előző csütörtöki előadás anyagát fogjuk gyakorolni.
- ▶ A 11. héten TDK konferencia miatt a gyakorlat marad el.
(Nem tilos ilyenkor konzultációt tartani.)

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Megj: Épesű ember nem így tekint a gráfokra.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

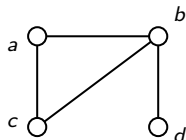
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

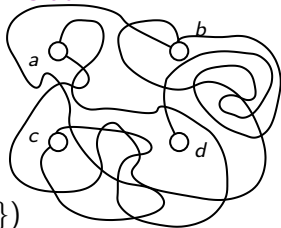
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.



Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

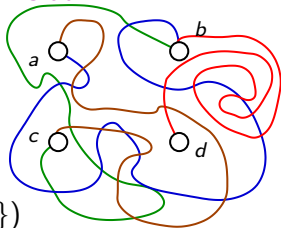
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.



Mi a gráf?

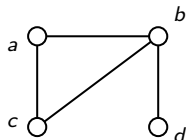
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

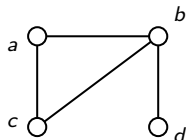
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Példa: A **facebook-gráf** csúcsai a meta-felhasználók, élei pedig az facebook-ismeretségeknek felelnek meg.

Mi a gráf?

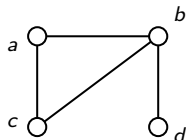
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

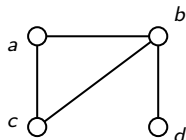
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



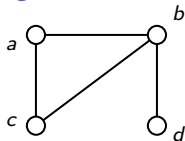
Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

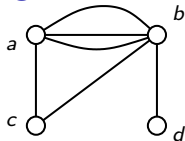
Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv -vel jelöljük. Ekkor e az u és v csúcsokat **köti össze**. Továbbá u és v az e **végpontjai**, amelyek az e élre **illeszkednek**, és e mentén **szomszédosak**.

Multigráfok és irányított gráfok

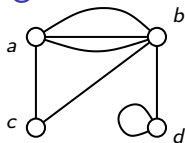


Multigráfok és irányított gráfok



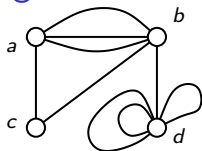
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**

Multigráfok és irányított gráfok



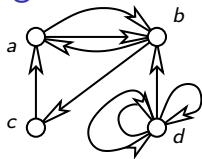
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**,
hurokélei

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

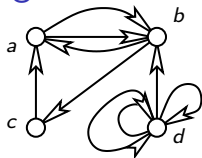
Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Multigráfok és irányított gráfok

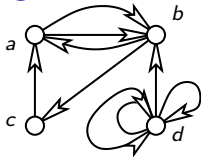


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ **véges gráf**, ha V és E is véges halmazok.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

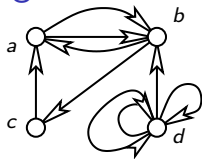
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ **véges gráf**, ha V és E is véges halmazok.

Megf: Egyik halmaz végességéből sem következik a másiké.

Megj: A végtelen gráfoknak rendkívül különös tulajdonságai lehetnek. Ezen a kurzuson csak véges gráfokkal foglalkozunk.

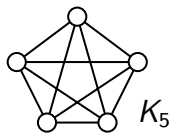
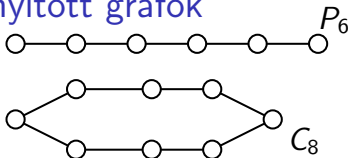
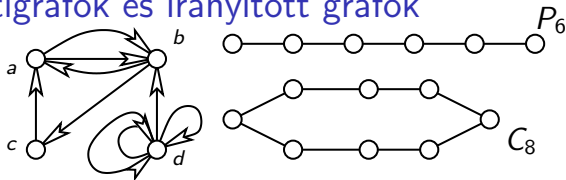
Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Multigráfok és irányított gráfok

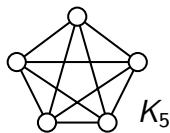
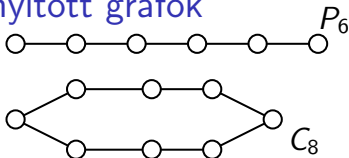
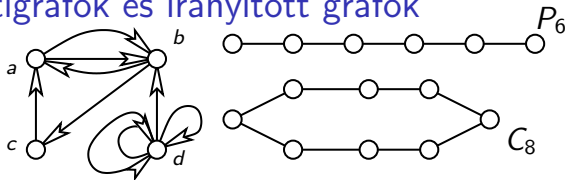


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.)

Multigráfok és irányított gráfok

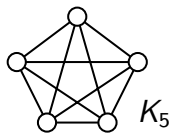
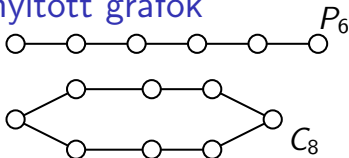
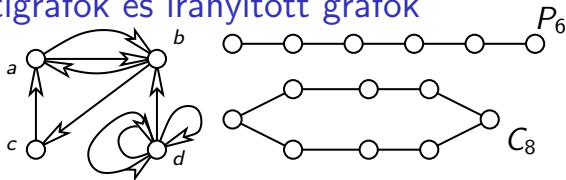


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 =$

Multigráfok és irányított gráfok

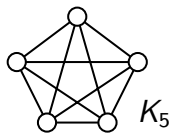
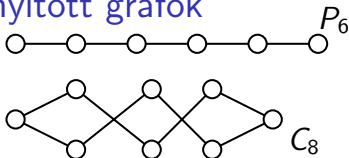
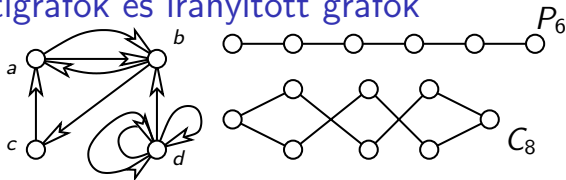


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$

Multigráfok és irányított gráfok

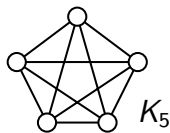
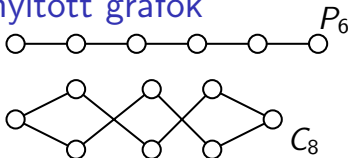
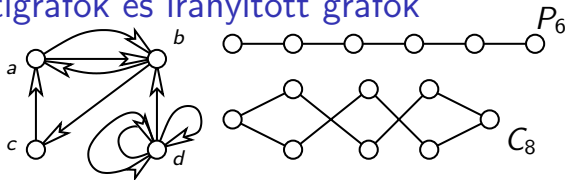


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 =$

Multigráfok és irányított gráfok

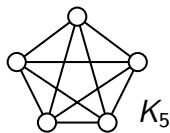
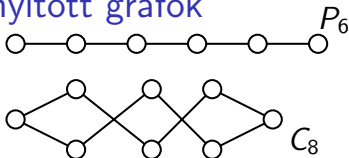
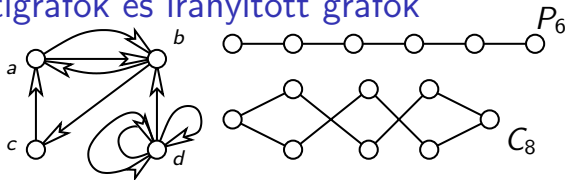


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$

Multigráfok és irányított gráfok

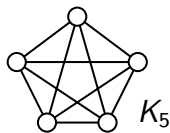
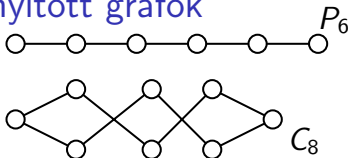
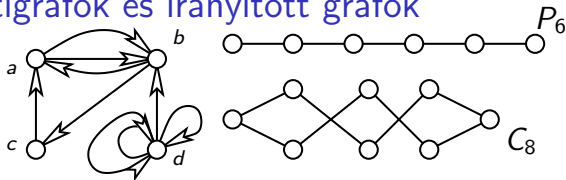


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 =$

Multigráfok és irányított gráfok

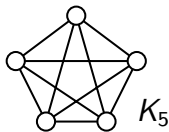
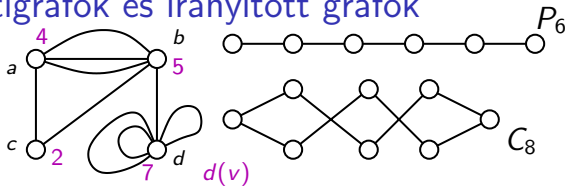


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Multigráfok és irányított gráfok



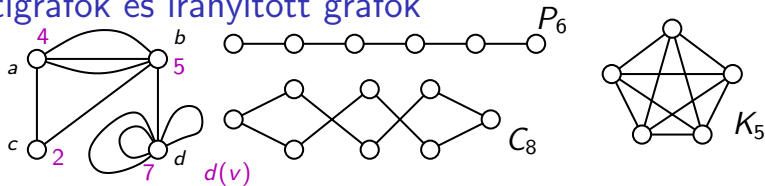
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

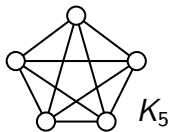
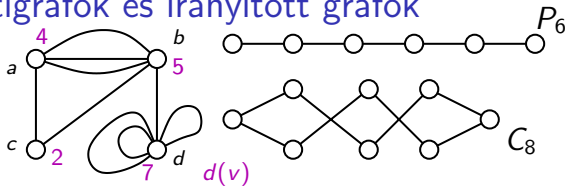
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Példa: A facebook-gráfban $d(v)$ a v ismerőseinek számát jelenti.

Multigráfok és irányított gráfok



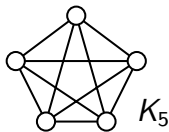
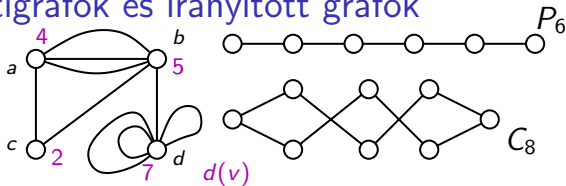
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

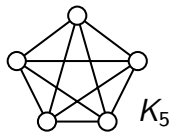
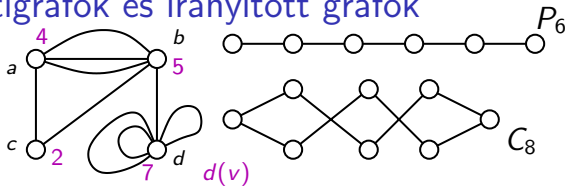
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

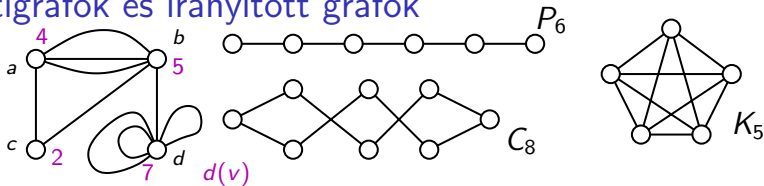
Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$.
 G **reguláris**, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$,
 G pedig **k -reguláris**, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G **reguláris**, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig **k -reguláris**, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, a K_n pedig $(n-1)$ -reguláris.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül

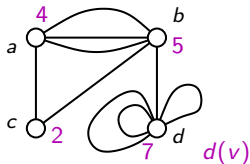
A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Példa:



A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege egyaránt az élszám.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

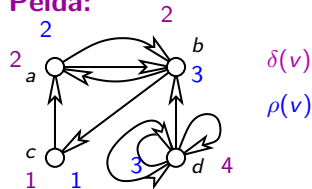
Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Írányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

Példa:



A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Írányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A csúcsokba belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Írányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A csúcsokba belépő éleket leszámolálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az irányított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. 0-élű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Írányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ teljesül, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Irányított kézfogás-lemma: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$ teljesül.

A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszegét is. Látni fogjuk, hogy ez a módszer (t.i. a gráf felépítése élek egyenkénti behúzásával) más bizonyításoknál is igen hasznos lehet.

Komplementer és izomorfia

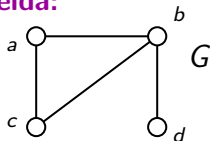
Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:

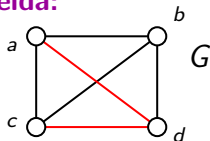


Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:

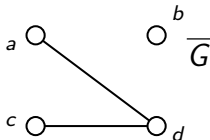
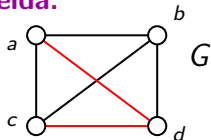


Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:



Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Biz: A K_n teljes gráf minden éle a G és $\overline{G}$ gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n -beli fokszámával, azaz $n - 1$ -gyel. □

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Az izomorfia jelölése: $G \cong G'$.

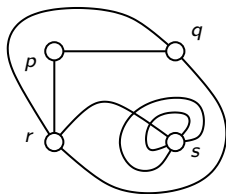
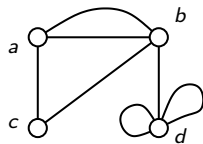
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Az izomorfia jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



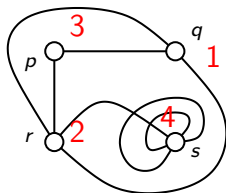
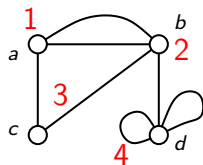
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Az izomorfia jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



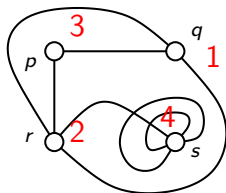
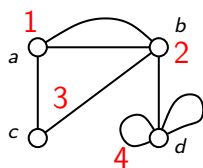
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

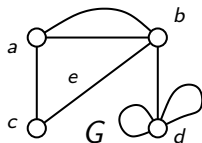
Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Az izomorfia jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



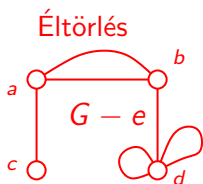
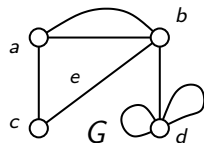
Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G -ben mint G' -ben, ugyanannyi C_4 kör található G -ben, mint G' -ben, stb.

Gráfoperációk



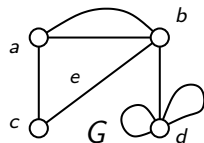
Gráfooperációk

Def:

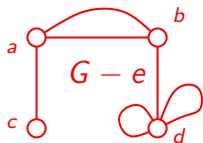


Gráfooperációk

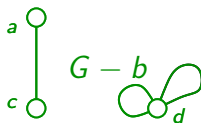
Def:



Éltörlés,

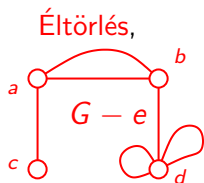
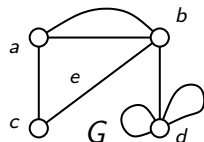


csúcsstörés

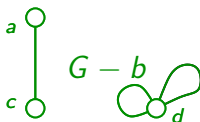


Gráfooperációk

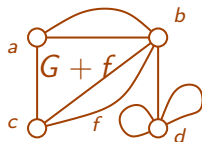
Def:



csúcsstörlés,

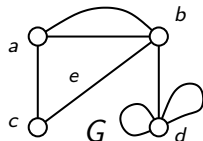


élhozzáadás.

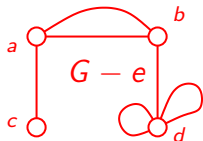


Gráfoperációk

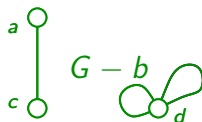
Def:



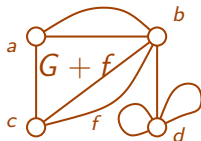
Éltörlés,



csúcsstörés,



élhozzáadás.

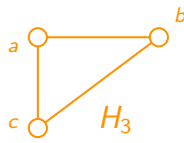
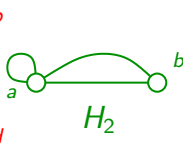
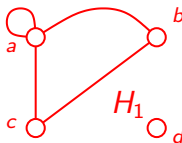
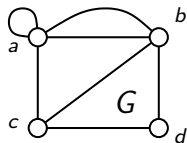


Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcsstörésekkel kapható gráf.

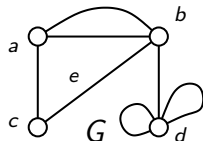
Részgráf: él- és csúcsstörésekkel kapható gráf.

Példa: H_1 , H_2 , H_3 a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.

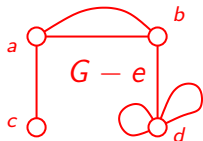


Gráfoperációk

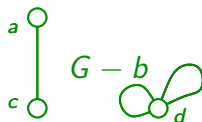
Def:



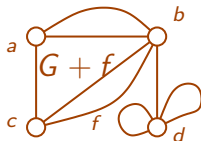
Éltörlés,



csúcsstörlés,



élhozzáadás.

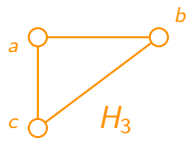
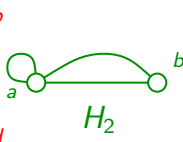
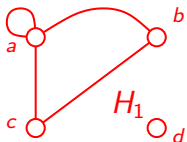
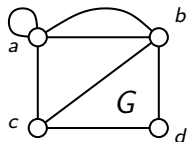


Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcsstörlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcsstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1 , H_2 , H_3 a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.

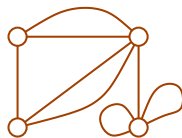
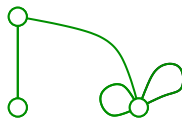
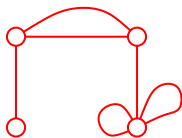
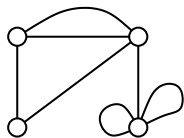


Megf: H a G részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszítő részgráfja $\iff V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

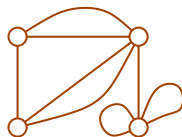
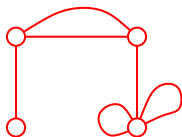
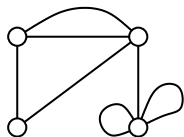
H a G feszített részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H csúcsai közt futó G -beli élekből áll.

Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

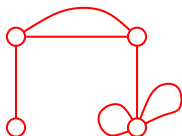
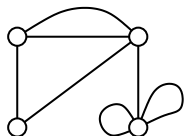
Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

Természetesen egy.

Furfangos kérdés

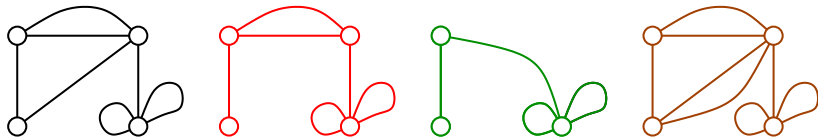


Hány gráf látható az ábrán?

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Természetesen egy.

Furfangos kérdés



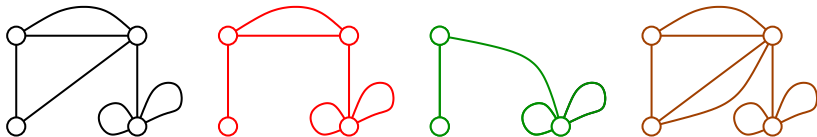
Hány gráf látható az ábrán?

Természetesen egy.

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

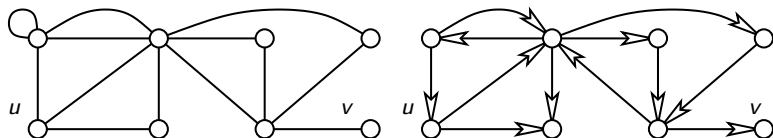
Természetesen egy.

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

A továbbiakban a gráf csúcsainak „elérhetőségi struktúráját” vizsgáljuk.

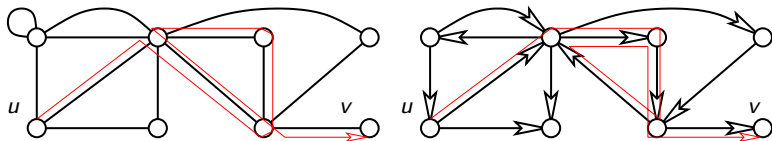
Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség

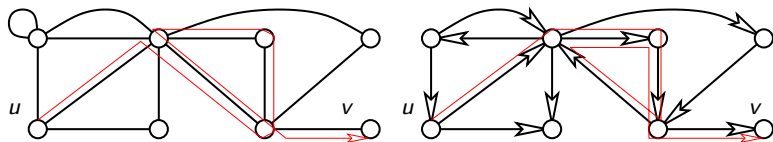


Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

(Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

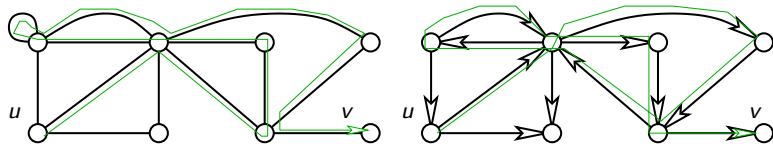
Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség

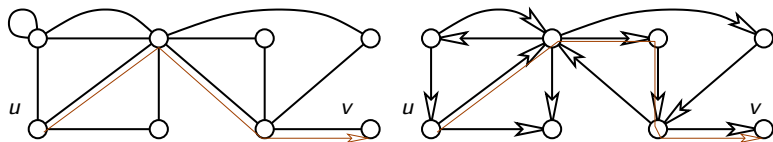


Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



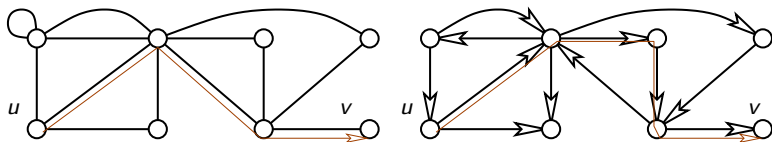
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

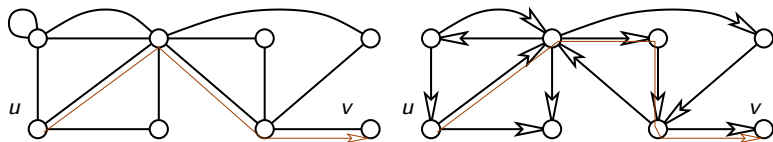
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u , a végpont v , akkor

uv -élsorozatról, uv -sétáról, ill. uv -útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **körről** beszélünk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



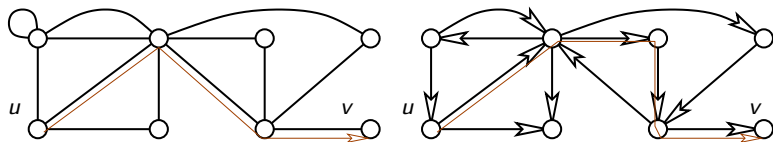
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

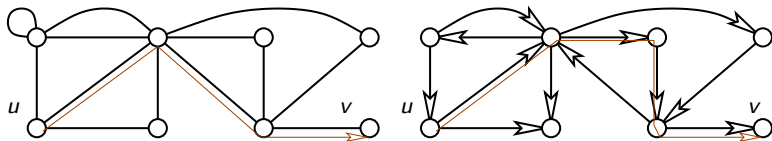
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. □

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

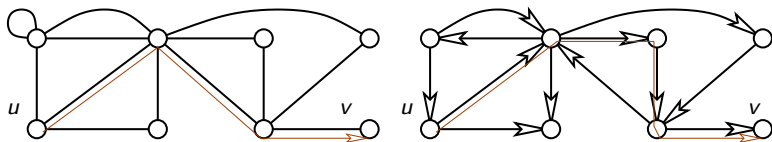
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. ☐

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út ☐

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

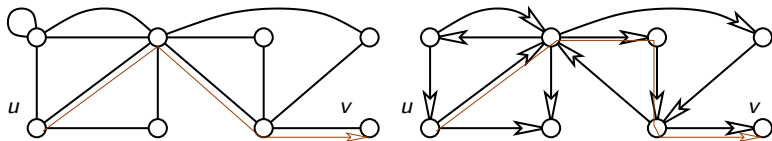
Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

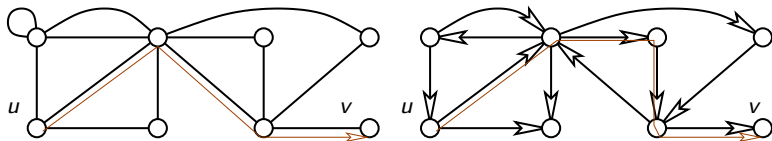
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

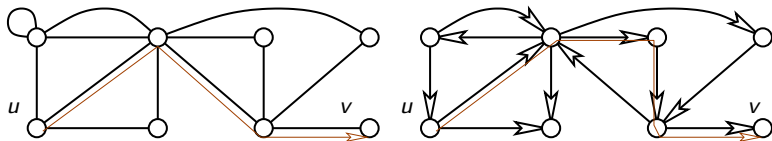
Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (2)

Az előző definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető:

a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv -út G -ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

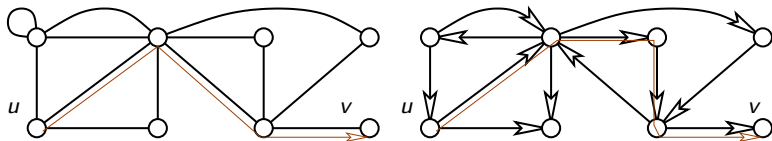
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

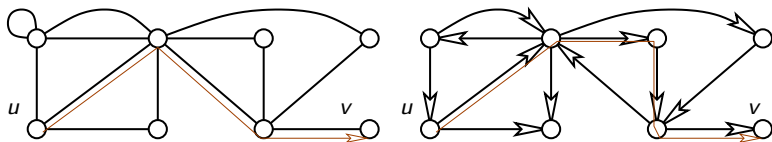
Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (3)

Írányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető:

a G irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefüggőnek**, ha a G -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

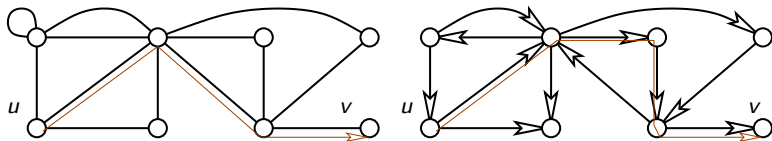
Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. $\square$

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. □

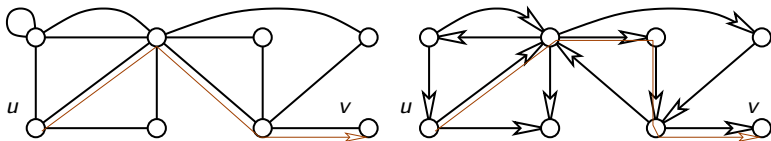
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út □

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

A következő célunk a gráfkomponens definíciója.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. ☐

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út ☐

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

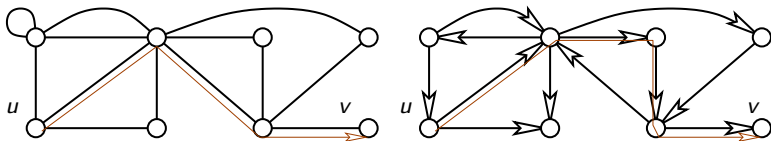
A következő célunk a gráfkomponens definíciója. Először precízen.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor a fenti $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, azaz

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és

(3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. ☐

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. □

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út □

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

A következő célunk a gráfkomponens definíciója. Először precízen.

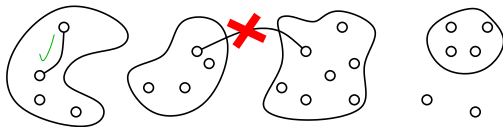
Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor a fenti $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, azaz

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és

(3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. □

Def: A G gráf **(összefüggő) komponense** a $\sim$ reláció ekvivalenciaosztálya.

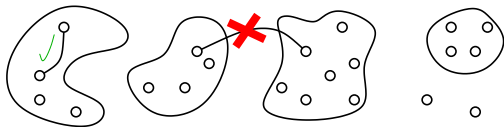
Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

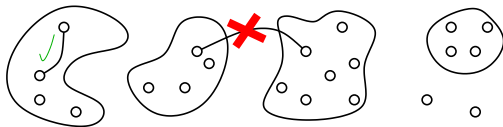
Megj: A fenti **Def** ekvivalens a korábban említett precíz (és absztrakt) definícióval. Mi a szemléletessége miatt ezt az utóbbit használjuk, jóllehet matematikai szempontból ügyetlenebb.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

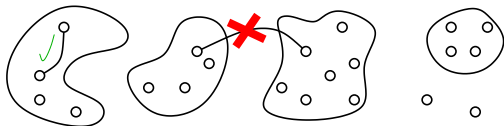


Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



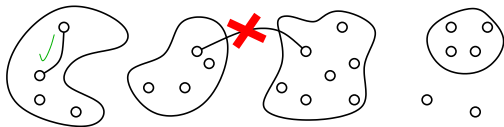
Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

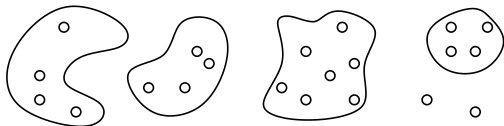
Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

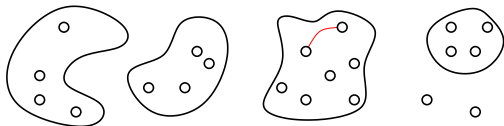
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazra egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzunk egy $e = uv$ élt?

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazra egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

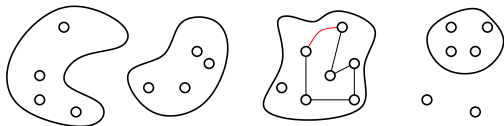
Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.

Ekkor e két végpontját már korábban is út kötötte össze, amit e -vel kiegészítve egy kört kapunk. Mivel komponensek közé nem húzunk be élt, a komponensek nem változnak e behúzása nyomán.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

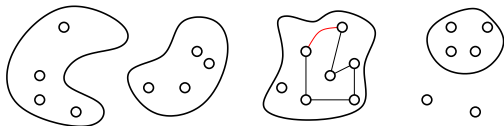
Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.

Ekkor e két végpontját már korábban is út kötötte össze, amit e -vel kiegészítve egy kört kapunk. Mivel komponensek közé nem húzzunk be élt, a komponensek nem változnak e behúzása nyomán.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

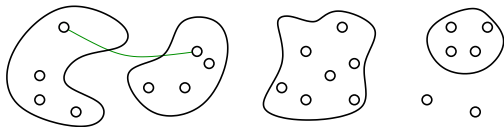
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazra egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

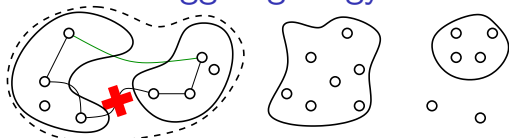
Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.

Ekkor e végpontjai között nem volt korábban út, ezért e nem hoz létre új kört. Egyúttal az e él összeköt két komponenst, melyek egy új komponenssé olvadnak össze.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

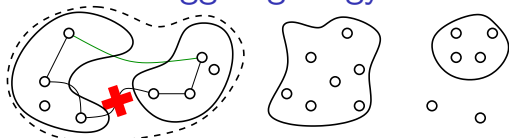
Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzunk egy $e = uv$ élt?

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.

Ekkor e végpontjai között nem volt korábban út, ezért e nem hoz létre új kört. Egyúttal az e él összeköt két komponenst, melyek egy új komponenssé olvadnak össze.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

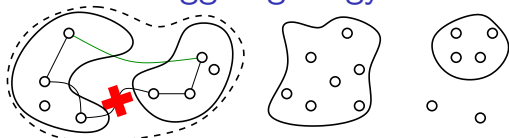
Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

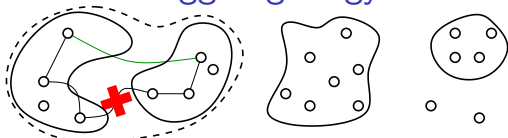
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Élhozzadási lemma (ÉlHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

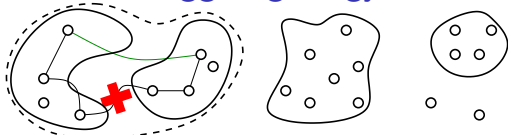
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Élhozzadási lemma (ÉlHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G' -nek több köre van, mint G -nek. (A keletkező kör elfajuló is lehet.)

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt néha nem a G gráf csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Élhozzadási lemma (ÉlHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G' -nek több köre van, mint G -nek. (A keletkező kör elfajuló is lehet.)

(2) G és G' körei megegyeznek, de G' -nek eggyel kevesebb komponense van, mint G -nek.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, foksámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, foksámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma

Köszönöm a figyelmet!