

A számítástudomány alapjai

Síkgráfok duálisa

2025. október 30.

Hogyan tovább?

Hogyan tovább?

- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás.
Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.

Hogyan tovább?

- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás. Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.
- ▶ A duális gráf tulajdonságai vizsgálata mellett megértjük, hogy mi a kapcsolat ugyanazon síkgráf különböző duálisai között.

Hogyan tovább?

- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás. Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.
- ▶ A duális gráf tulajdonságai vizsgálata mellett megértjük, hogy mi a kapcsolat ugyanazon síkgráf különböző duálisai között.
- ▶ Feltárul a DKFL etimológiája.

Hogyan tovább?

- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás. Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.
- ▶ A duális gráf tulajdonságai vizsgálata mellett megértjük, hogy mi a kapcsolat ugyanazon síkgráf különböző duálisai között.
- ▶ Feltárul a DKFL etimológiája.
- ▶ Soros él?

Hogyan tovább?

- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás. Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.
- ▶ A duális gráf tulajdonságai vizsgálata mellett megértjük, hogy mi a kapcsolat ugyanazon síkgráf különböző duálisai között.
- ▶ Feltárul a DKFL etimológiája.
- ▶ Soros él?
- ▶ A duális gráf jelentősége villamos hálózatok esetén.

Hogyan tovább?

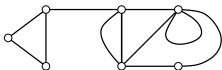
- ▶ Síkgráfok között van egy különös kapcsolat: a dualitás. Minden síkbarajzolható gráfnak van duálisa, de egyetlen más gráfnak sincs.
- ▶ A duális gráf tulajdonságai vizsgálata mellett megértjük, hogy mi a kapcsolat ugyanazon síkgráf különböző duálisai között.
- ▶ Feltárul a DKFL etimológiája.
- ▶ Soros él?
- ▶ A duális gráf jelentősége villamos hálózatok esetén.

Disclaimer: A ma elmondottak nem részei a törzsanyagnak, így azt sem a ZH-n, sem a vizsgán nem kérjük számon.

Síkgráfok duálisa

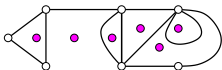
Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Síkgráfok duálisa



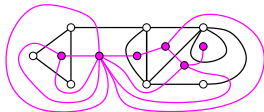
Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Síkgráfok duálisa



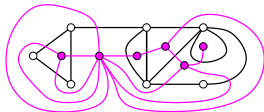
Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

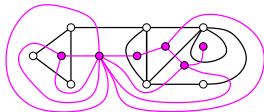
Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

Síkgráfok duálisa

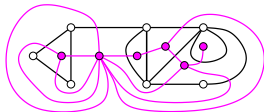


Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

Síkgráfok duálisa



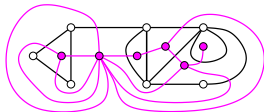
Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

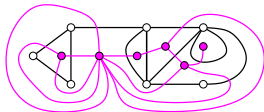
Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Köv: KFL a duálisra $\sum_{i=1}^t \ell_i = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$.

Síkgráfok duálisa



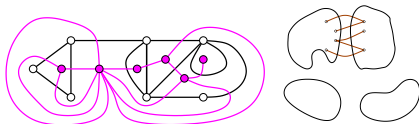
Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

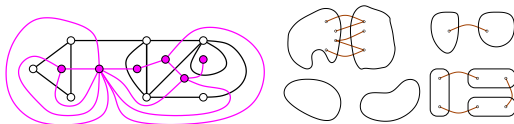
Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf **vágása**, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G -nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

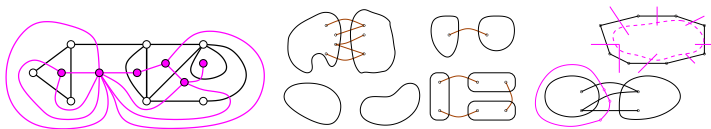
(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf **vágása**, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G -nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét.

Elvágó él: egyélű vágás. **Soros élek:** kétélű vágás.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf **vágása**, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G -nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét.

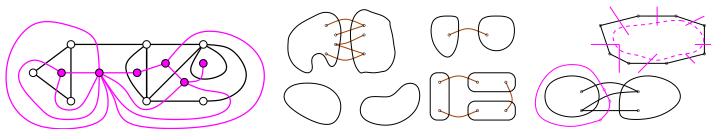
Elvágó él: egyélű vágás. **Soros élek:** kétélű vágás.

Kör-vágás dualitás: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor

$(C \text{ a } G \text{ köre}) \iff (C^* \text{ a } G^* \text{ vágása})$ ill.

$(Q \text{ a } G \text{ vágása}) \iff (Q^* \text{ a } G^* \text{ köre})$.

Síkgráfok duálisa



Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv által határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)

(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.

(3) Ha v az i -dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf **vágása**, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G -nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét.

Elvágó él: egyélű vágás. **Soros élek:** kétélű vágás.

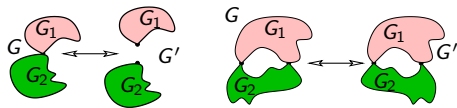
Kör-vágás dualitás: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor

$(C \text{ a } G \text{ köre}) \iff (C^* \text{ a } G^* \text{ vágása})$ ill.

$(Q \text{ a } G \text{ vágása}) \iff (Q^* \text{ a } G^* \text{ köre})$.

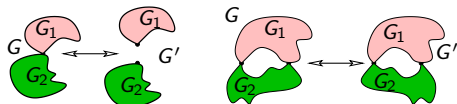
Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

Whitney



Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^* -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Whitney

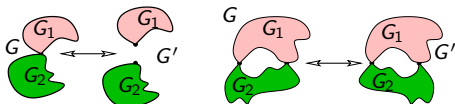


Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^* -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$ kölcs. egyért. lekép. **kör-vágás dualitás** G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)$ H vágása.

Whitney másik tétele: Tfh G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Whitney



Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^* -ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.

Def: A $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$ kölcs. egyért. lekép. **kör-vágás dualitás** G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)$ H vágása.

Whitney másik tétele: Tfh G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm- és Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H -n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

Mit tanultunk ma?

- ▶ Síkgráfok duálisa

Mit tanultunk ma?

- ▶ Síkgráfok duálisa
- ▶ Vágás, elvágó él, soros élek, kör-vágás dualitás

Mit tanultunk ma?

- ▶ Síkgráfok duálisa
- ▶ Vágás, elvágó él, soros élek, kör-vágás dualitás
- ▶ SRható gráf duálisainak kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- ▶ Síkgráfok duálisa
- ▶ Vágás, elvágó él, soros élek, kör-vágás dualitás
- ▶ SRható gráf duálisainak kapcsolata

Mesedélután vége.

Mit tanultunk ma?

- ▶ Síkgráfok duálisa
- ▶ Vágás, elvágó él, soros élek, kör-vágás dualitás
- ▶ SRható gráf duálisainak kapcsolata

Mesedélután vége.

Nem zeti konzultáció!

Mire figyeljünk a ZH-n?

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „ SzA 1. ZH”.

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „ SzA 1. ZH” .
- ▶ Legyen nálunk okmánynak minősülő, fényképes igazolvány

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „ SzA 1. ZH” .
- ▶ Legyen nálunk okmánynak minősülő, fényképes igazolvány, megbízható (nem piros) toll, jó ha van ceruza és radír. A kiosztott feladatlagra dolgozni nem szabad, azt beadni nem lehet. Enni- innivaló jöhet.

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „ SzA 1. ZH”.
- ▶ Legyen nálunk okmánynak minősülő, fényképes igazolvány, megbízható (nem piros) toll, jó ha van ceruza és radír. A kiosztott feladatlagra dolgozni nem szabad, azt beadni nem lehet. Enni- innivaló jöhet.
- ▶ Táská, kabát, összetűzetlen papír, könyv, jegyzet, **telefon**, **tablet**, **okosóra**, laptop stb nem lehet még a padsorok között sem. Az értékek mehetnek a tanári asztalra.

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „ SzA 1. ZH”.
- ▶ Legyen nálunk okmánynak minősülő, fényképes igazolvány, megbízható (nem piros) toll, jó ha van ceruza és radír. A kiosztott feladatlpra dolgozni nem szabad, azt beadni nem lehet. Enni- innivaló jöhet.
- ▶ Táská, kabát, összetűzetlen papír, könyv, jegyzet, **telefon**, **tablet**, **okosóra**, laptop stb nem lehet még a padsorok között sem. Az értékek mehetnek a tanári asztalra.
- ▶ Lényegretörően indokoljunk és szüreteljük le az ingyenpontokat. Ehhez ld. a korábbi ZH-k javítókulcsait.

Mire figyeljünk a ZH-n?

- ▶ Dolgozatírás előtt látogassuk meg a mosdót.
- ▶ Vigyünk magunkkal elválaszthatatlanul összetűzött papírokat. A JF sarokban szerepeljen NÉV, NEPTUN KÓD, a címlapon a gyv neve, csoport, dátum is és az, hogy „SzA 1. ZH”.
- ▶ Legyen nálunk okmányoknak minősülő, fényképes igazolvány, megbízható (nem piros) toll, jó ha van ceruza és radír. A kiosztott feladatlpra dolgozni nem szabad, azt beadni nem lehet. Enni- innivaló jöhet.
- ▶ Táská, kabát, összetűzetlen papír, könyv, jegyzet, **telefon**, **tablet**, **okosóra**, laptop stb nem lehet még a padsorok között sem. Az értékek mehetnek a tanári asztalra.
- ▶ Lényegretörően indokoljunk és szüreteljük le az ingyenpontokat. Ehhez ld. a korábbi ZH-k javítókulcsait.
- ▶ Olvashatóan dolgozzunk, egyértelműen húzzuk át a felesleges részeket. Nem kell sorrendben megoldani a feladatokat, a lapok hátoldalára is lehet dolgozni. Piszkozatnak az utolsó lapot célszerű használni.