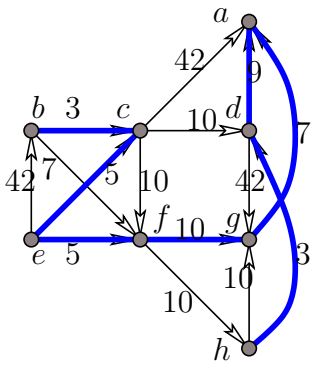
A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2023. 11. 02.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

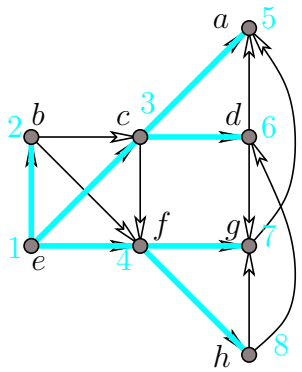
1. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Határozzuk meg $p = 42$ mellett a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának költségét. Lehetséges-e egyetlen 10 költségű él költségét úgy 7-re csökkenteni, hogy az így kapott költségfüggvényre a minimális költségű feszítőfa költsége ugyanannyi maradjon, mint amennyi az eredeti költségfüggvény esetén volt?



Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek bevételéről növekvő költség szerint egyenként döntve. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 42. (7 pont)

Ha a cf él 10-es költségét 7-re csökkentjük, akkor a Kruskal-algoritmus ugyanezt a feszítőfát fogja megtalálni, ezért a feladat második részének kérdésére „igen” a válasz. (3 pont)

2. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Futtassuk le G egy szélességi bejárását az e csúcsból indítva. Határozzuk meg, hogy ebben a bejárásban milyen sorrendben fejeztük be a c, d, f és g csúcsokat. Határozzuk meg e négy csúcs összes olyan sorrendjét ami egy e-ből indított BFS bejárás befejezési sorrendjéből adódhat. (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Az ábrán egy e-ből indított BFS outputja látható, megjelöltük a bejárás fáját és az egyes csúcsok befejezési számait. A kérdezett csúcsok befejezésének sorrendje a konkrét lefutás esetén c, f, d, g. (4 pont)

Tanultuk, hogy BFS esetén az elérési sorrend és a befejezési sorrend megegyezik, így az említett csúcsok elérésének lehetséges sorrendjeit kell meghatározni. (1 pont)

A szélességi bejárás során minél később érünk el egy csúcsot, annál távolabb van az adott csúcs a gyökértől. Mivel G-ben f és c 1 távolságra vannak e-től, d és g pedig 2 távolságra, ezért az előbbi két csúcs bármelyikének elérése biztosan megelőzi az utóbbi csúcsok bármelyikének elérését. (2 pont)

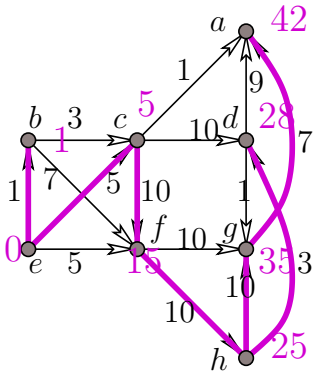
Ha a szélességi bejárás során c-t hamarabb érjük el, mint f-et, akkor c gyerekeit is hamarabb érjük el f gyerekeinél. Mivel a d csúcs szülője a BFS-fában mindenképpen c, és g-é pedig bizonyosan f, ezért a kérdezett négy csúcsot c, f, d, g sorrendben éri el (és fejezi be) a BFS. Ha pedig a szélességi bejárás során f-et c előtt érjük el, akkor f gyerekeit megelőzik c gyerekeit, így ebben az esetben a kérdezett sorrend f, c, g, d. (2 pont)

Könnyen látható, hogy a BFS algoritmust e-ből indítva mindkét sorrend megkapható, ezért a feladatban kérdezett lehetséges sorrendek halmaza pontosan a két fent említett sorrendből áll. (1 pont)

3. Határozzuk meg $p = 1$-re az ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket!

A problémához tartozó gráf csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástörléses módszerrel. Így adódik a e, b, c, f, h, d, g, a sorrend. (2 pont)

Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. Egyúttal lilával megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok mellé írt számokat meghatározzák. (4 pont)



A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási időt tehát az a csúcshoz tartozó 42-es érték határozza meg. (1 pont)

Ezért a krtikus út hossza 42, és minden kritikus út az a csúcsban végződik, és a lila éleket használja. Ezért egyetlen kritikus út van, mégpedig az e, c, f, h, g, a. Ennek megfelelően ezen kritikus úton szereplő csúcsok a kritikus tevékenységek, a b és d tevékenységek pedig nem kritikusak. (3 pont)

4. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Legkevesebb hány élt kell törölni a G gráfból ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-körsétája? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)

Az órán azt tanították, hogy az az Euler-körséta szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő legyen, és minden csúcs fokszáma páros legyen. (3 pont)

A G gráfban fellépő fokszámok az alábbiak: $3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5$, azaz hat páratlan fokú csúcsa van G-nek. (1 pont)

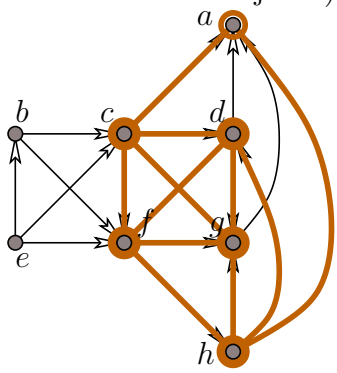
Minden él törlése két csúcs fokszámát csökkenti 1-gyel, ezért minden él törlése legfeljebb 2-vel csökkenti a páratlan fokú csúcsok számát. (2 pont)

Ezért legalább 3 él törlése szükséges ahhoz, hogy a kapott gráfnak Euler-körsétája legyen. (1 pont)

Ha G-ből töröljük a ac, be és fh éleket, akkor minden csúcs fokszáma páros lesz amellett, hogy a törlések után kapott gráf összefüggő marad. (2 pont)

Ezért 3 él törlése nem csupán szükséges, de elegendő is a kívánt cél eléréséhez, vagyis a feladat kérdésére „három” a helyes válasz. (1 pont)

5. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Síkbarajzolható-e az a G' gráf, amit G-ből az ah, cg és df élek behúzásával kapunk? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Ha mutatunk G'-nek egy topologikus K_5 részgráfját, akkor a tanultak szerint G' nem síkbarajzolható.

(E helyett hivatkozhatunk a Kuratowski-tételre is.) (3 pont)

A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)

A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G' egy topologikus K_5 részgráfját ábrázolják. Tehát G' nem síkbarajzolható. (6 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy az F fának 101 csúcsa van és F leveleit pirosra színeztük. Legyen F' az a fa, amit F-ből a pirosra színezett csúcsok törlésével kapunk. Színezzük F' leveleit fehérre, és az ezután is színezetlen csúcsokat pedig zöldre. Tudjuk, hogy minden zöld csúcsa negyedfokú F'-ben és a fehér csúcsok száma 21-gyel több a zöld csúcsokénál. Hány piros csúcsa van F-nek?

Jelölje p, f, z rendre a piros, fehér ill. zöld csúcsok számát. A cél p meghatározása. Tudjuk, hogy F csúcsainak száma $p + f + z = 101$, valamint, hogy $f = z + 21$. (2 pont)

Az F' fának $f + z$ csúcsa van, így a tanultak miatt élei száma $f + z - 1$. (2 pont)

A KFL miatt ekkor $4z + f = \sum_{v \in V(F')} d(v) = 2|E(F')| = 2f + 2z - 2$. (3 pont)

Innen $f = 2z + 2$ adódik. A korábbi $f = z + 21$ kifejezést behelyettesítve kapjuk, hogy $z + 21 = 2z + 2$, azaz $z = 19$. (1 pont)

Ekkor $f = z + 21 = 40$, (1 pont)

és $p = 101 - f - z = 101 - 40 - 19 = 42$. Ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (1 pont)

Nem követeljük meg annak az igazolását, hogy létezik a feladatban leírt tulajdonsággokkal rendelkező F fa. Egyébként könnyű ilyet konstruálni: vegyünk pl. egy 19 zöld csúcsból álló utat, ezen zöld csúcsokra ragasszunk fehér leveleket úgy, hogy minden zöld csúcs fokszáma 4 legyen. Minden fehér levélre ragasszunk egy-egy piros levelet, majd még egy tetszőleges fehér csúcsra további két levelet, és már meg is kaptunk egy ilyen fát. Ha valaki az érdemi bizonyításból nem ér el értékelhető eredményt, de talál egy konkrét F fát, amire teljesülnek a feladatbeli tulajdonságok, és megállapítja, hogy F-nek 42 levele van, arra 1 pontot adhatunk.