A számítástudomány alapjai

Minimális költségű feszítőfák

2023. szeptember 19.

Emlékeztető

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉHL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)

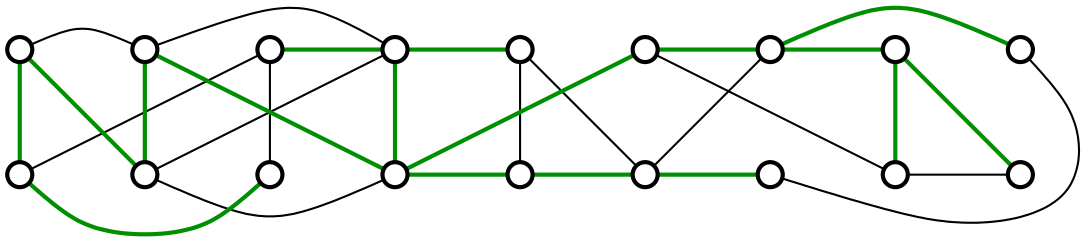
Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉHL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.

Emlékeztető

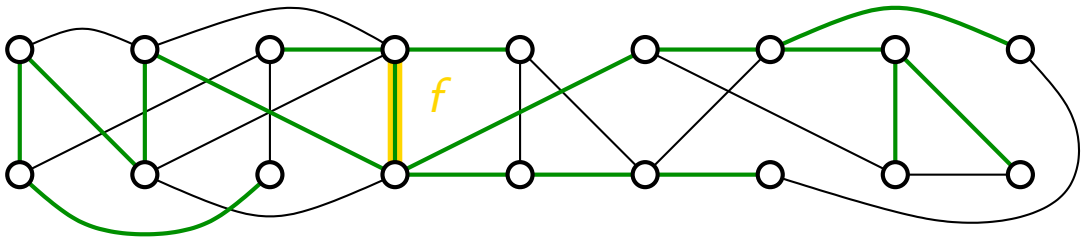
- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉHL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.
- Az ÉHL „fordítottját" használva pedig az látszik, hogy ha egy kör élét töröljük, akkor nem változnak a komponensek. Ezért úgy is található feszítőfa (vagy feszítő erdő), hogy addig törlünk körbeli élt, amíg van kör a gráfban.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

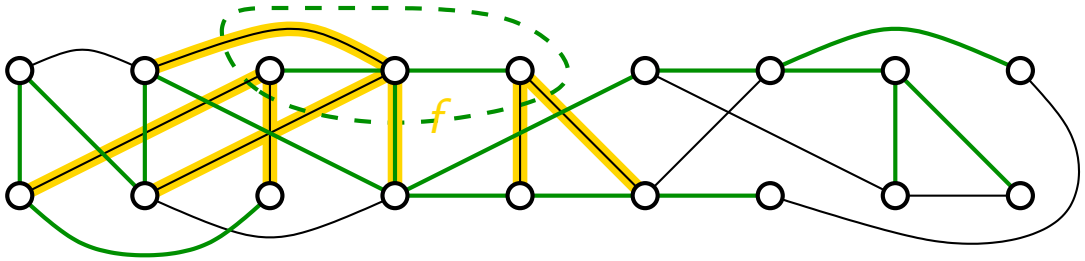
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

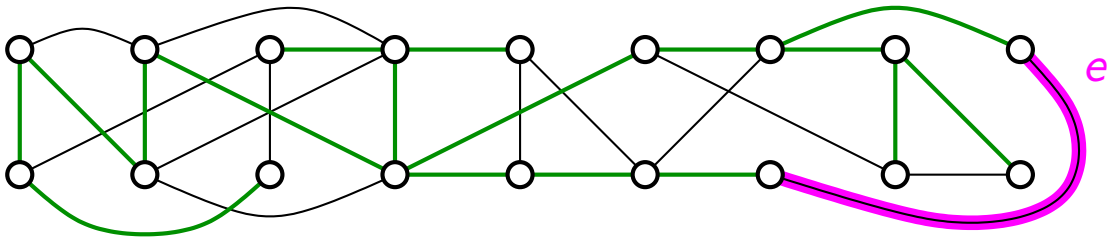
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

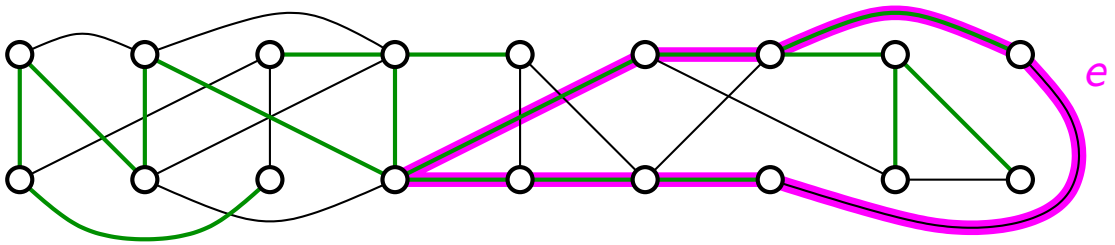
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer

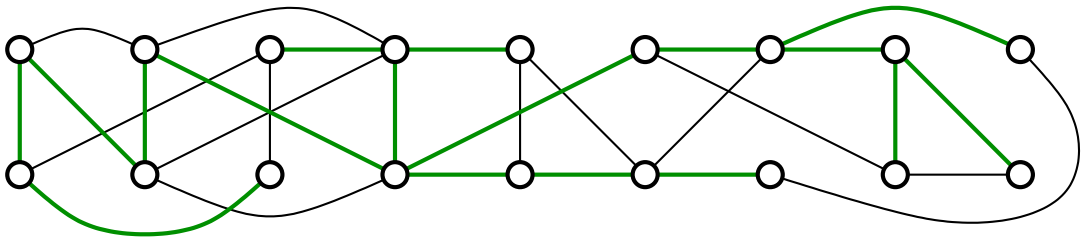


Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

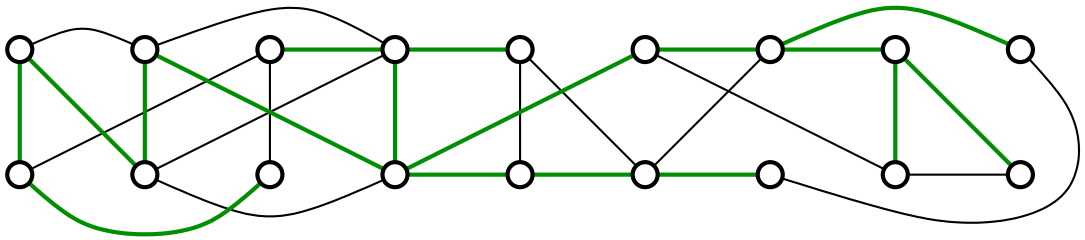
Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor

$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa})$

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

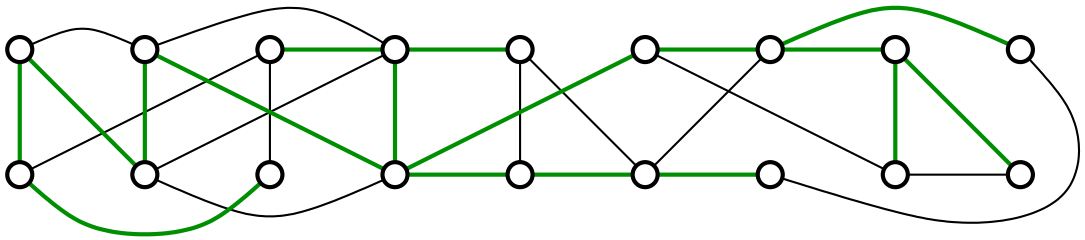
Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor

$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa}) \iff (e \in Q_f)$.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él szerepel-e F-ben, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

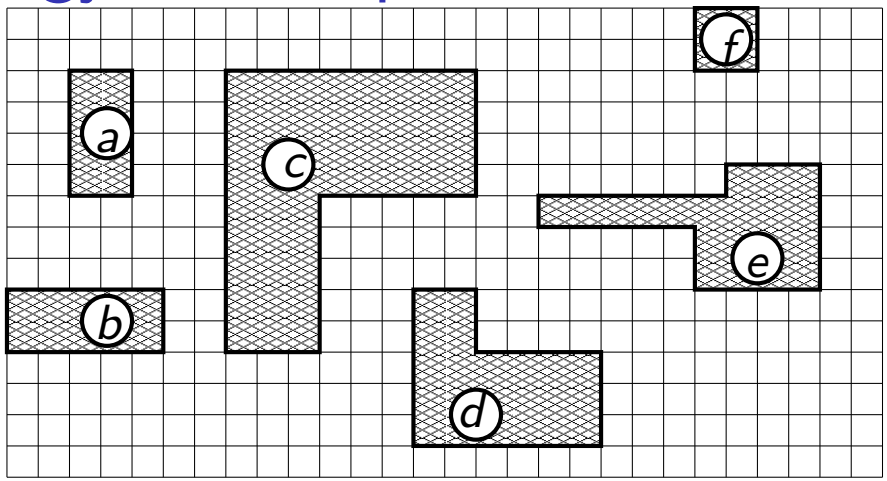
Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor
$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa}) \iff (e \in Q_f)$.

Köv: Az C_e alapkört e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alap vágása e-t tartalmazza, azaz $C_e = \{e\} \cup \{f \in E(F) : e \in Q_f\}$.

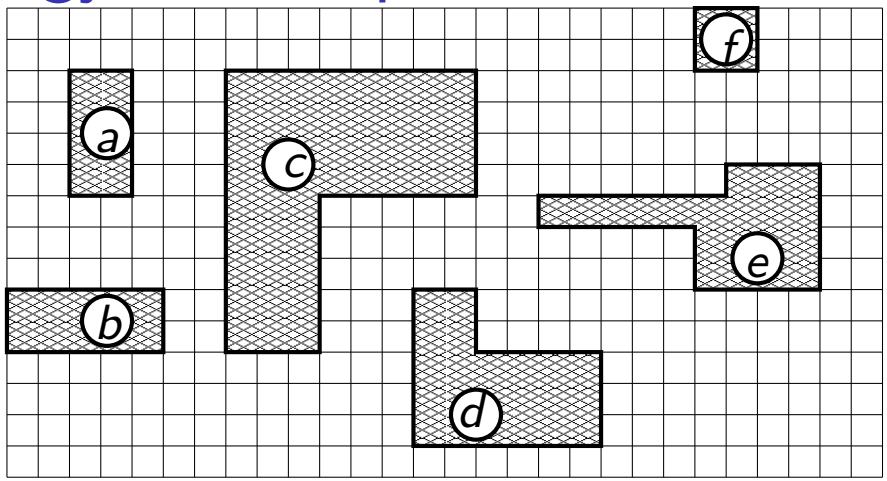
A Q_f alap vágást f mellett G azon élei alkotják, melyek alapköre f-et tartalmazza, azaz $Q_f = \{f\} \cup \{e \in E(G) \setminus F(F) : f \in C_e\}$.

Egy gyakorlati probléma

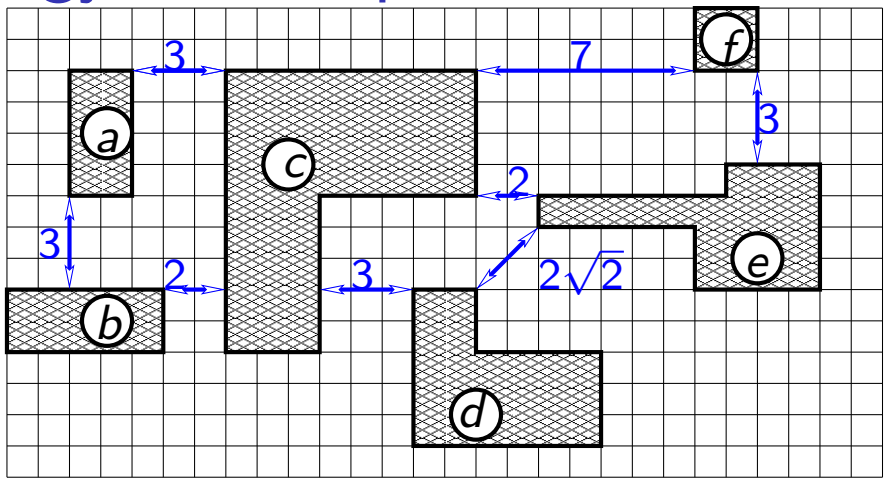


A Guváti vállalat piripócsi üzemében álló fém konténereket kell leföldelni, azaz mindegyiket közvetlenül vagy közvetve összekötni az f földelési ponttal. Nem törődünk a vonatkozó érintésvédelmi szabályokkal, így egy konténer egy másik, már földelt konténerhez is hozzácsatlakoztatható. Hogyan lehet ezt a feladatot a lehető legkevesebb földelővezeték felhasználásával úgy megoldani, hogy minden felhasznált vezetéknek egy konténert vagy egy másik konténerrel, vagy a földelési ponttal kell közvetlenül összekötnie?

Egy gyakorlati probléma

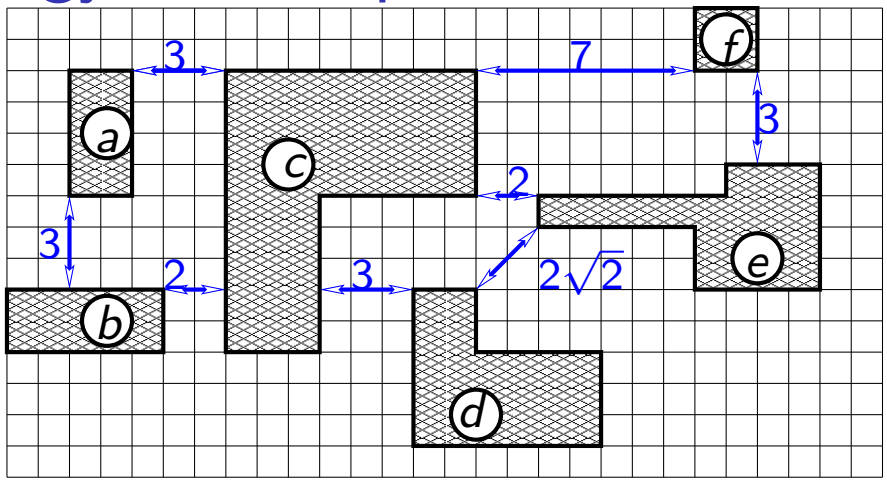


Egy gyakorlati probléma



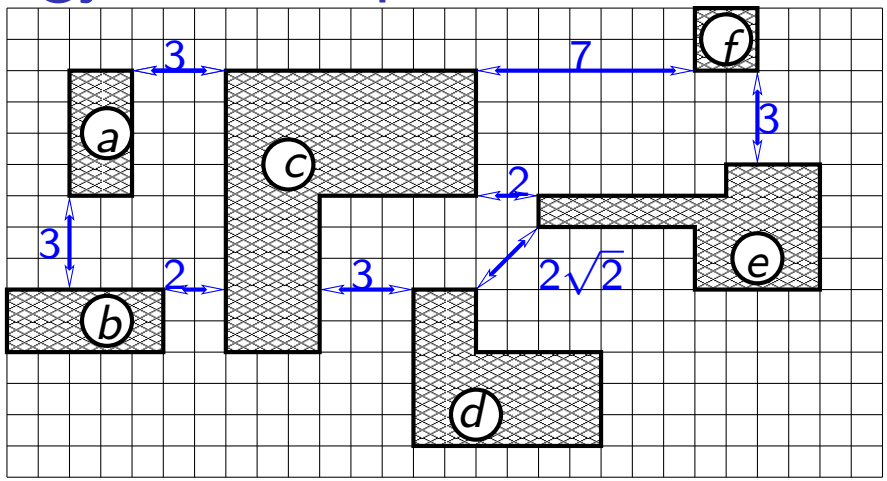
- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.

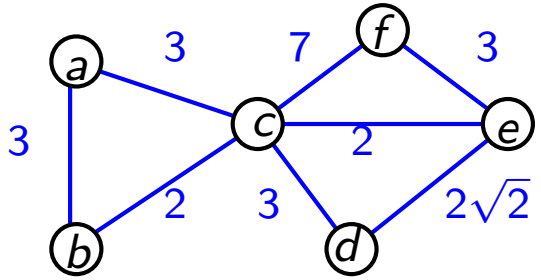
Egy gyakorlati probléma



- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.

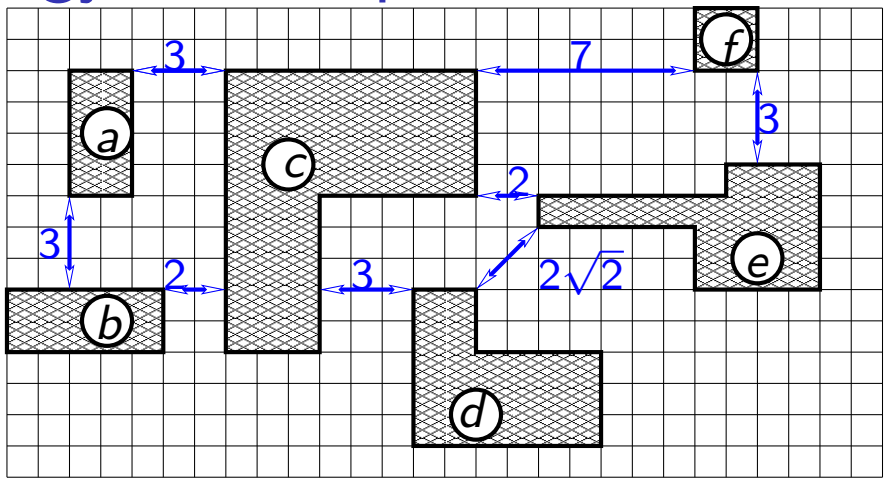
Egy gyakorlati probléma

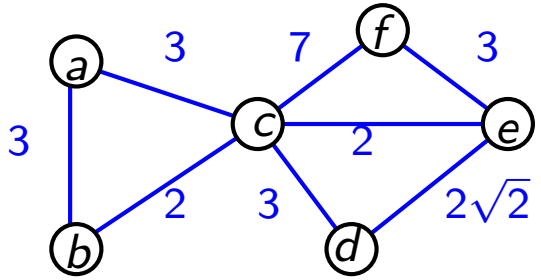




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.

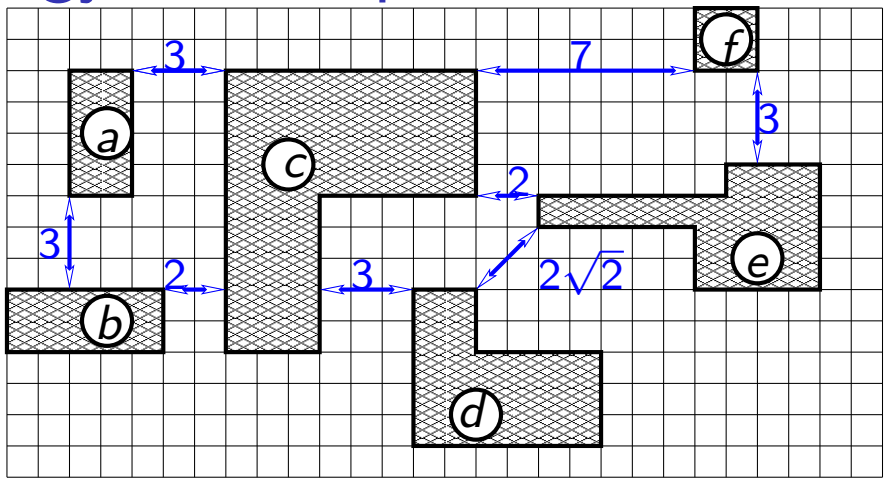
Egy gyakorlati probléma

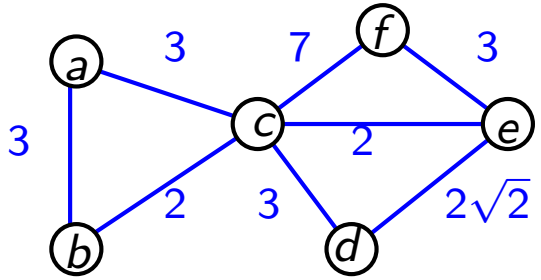




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.

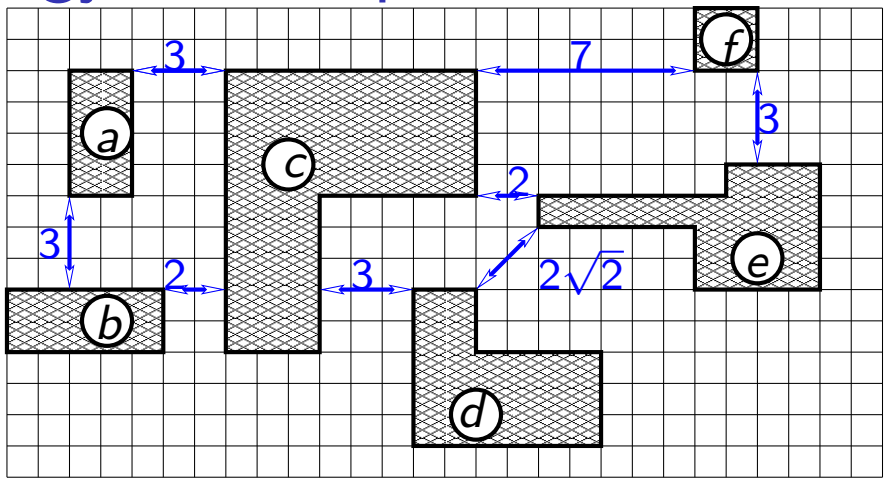
Egy gyakorlati probléma

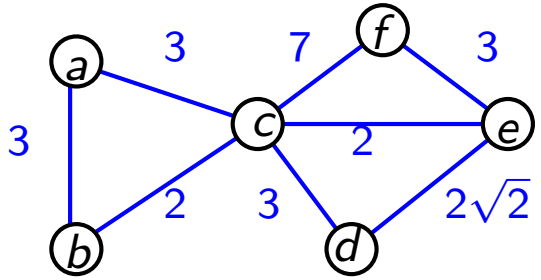




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
- Ezért a kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.

Egy gyakorlati probléma





- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
- Ezért a kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.
- A továbbiakban ezt a feladatot formalizáljuk.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.
Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

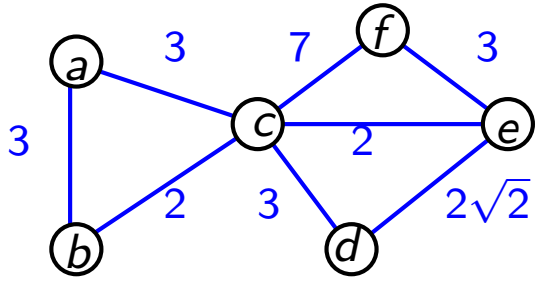
$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

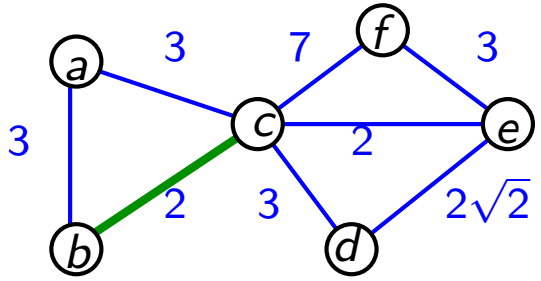
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

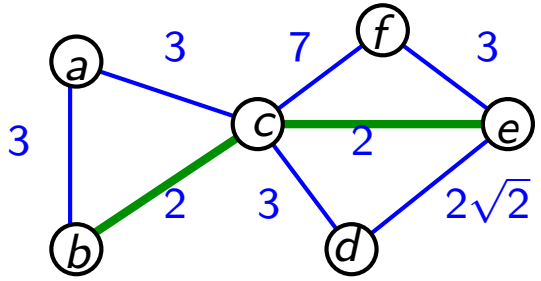
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

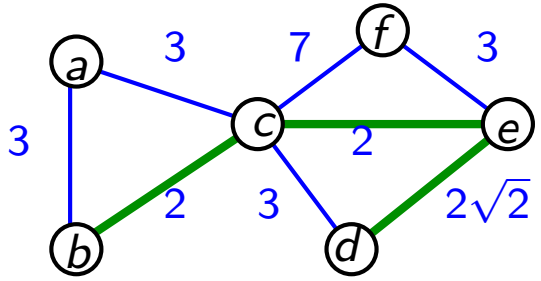
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

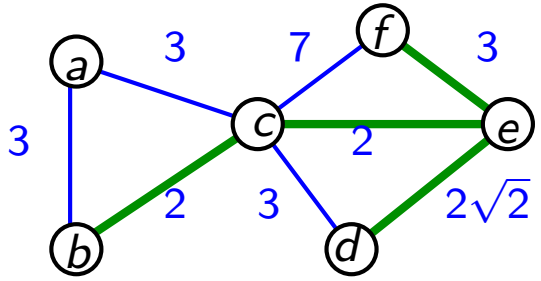
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

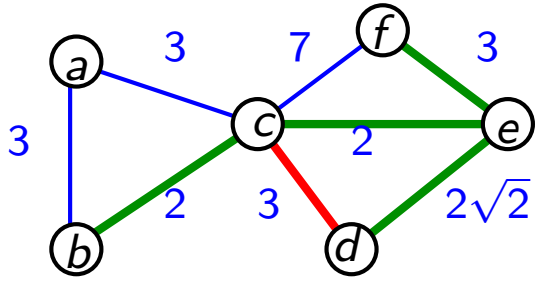
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

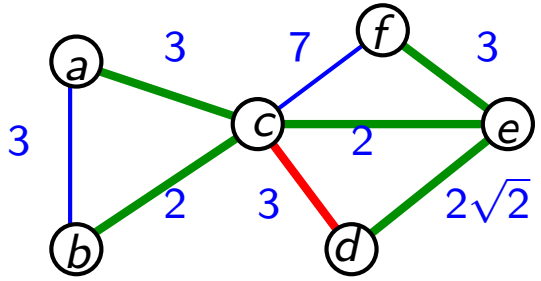
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

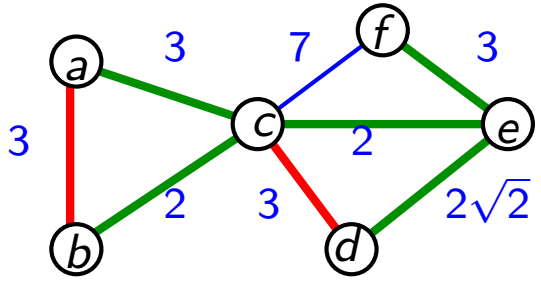
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

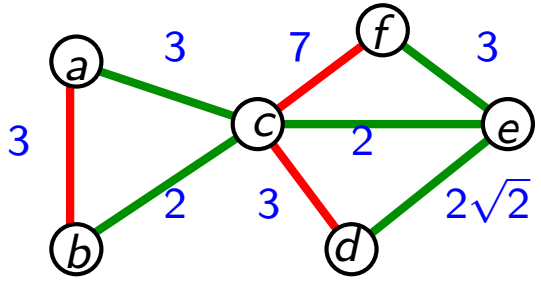
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

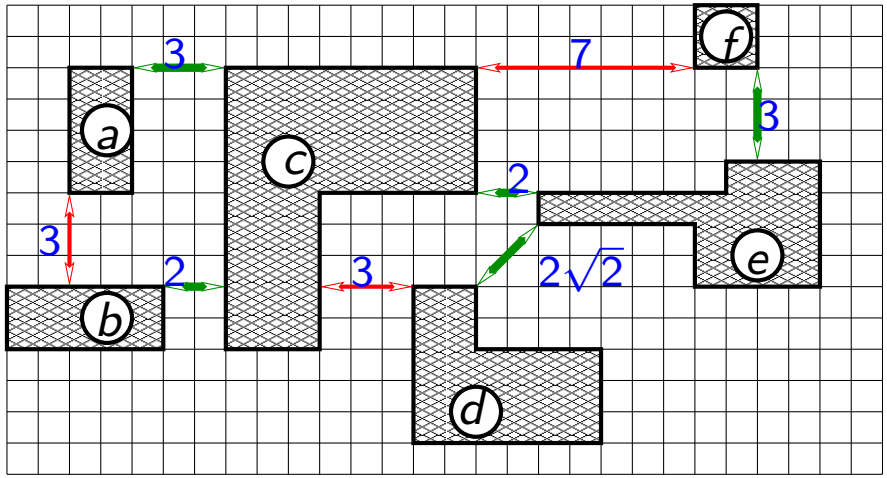
Kruskal-algoritmus egy példán

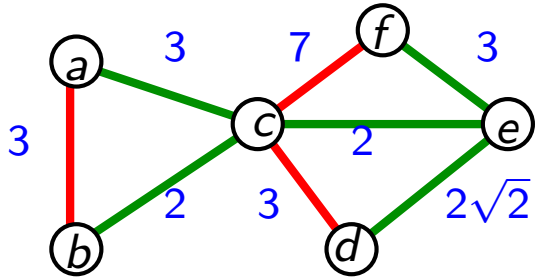


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

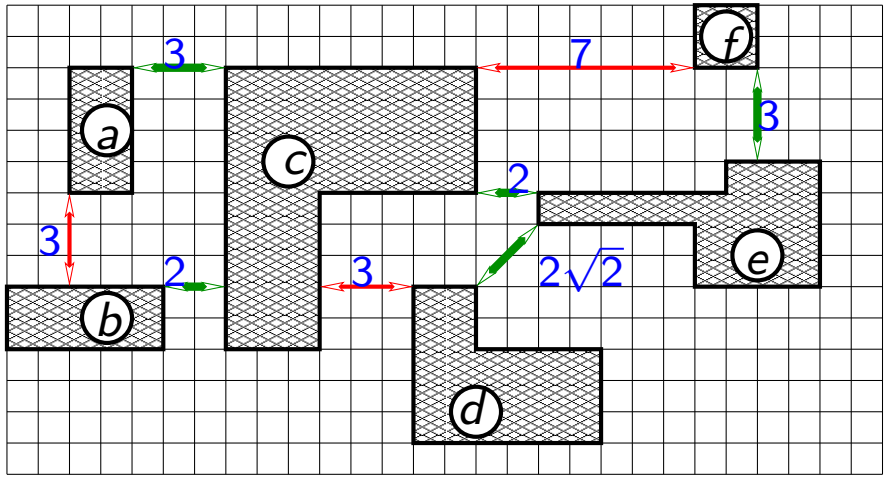


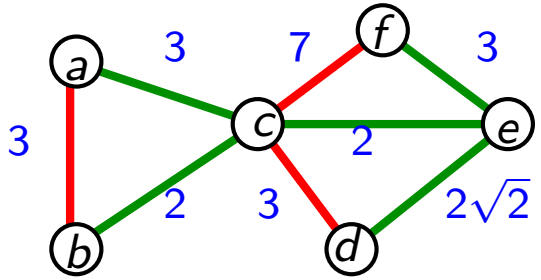


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \qquad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán





Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál.
Sőt: ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.
A kérdés az, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. min.ktg-ű feszítő erdőt) ad-e.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Biz: A Kruskal-algortimus a legfeljebb c költségű (E_c-beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a c-nél drágábbakat. Ezért E_c összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a G_c gráfon futtattuk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja G_c egy feszítő erdeje. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Megj: Ha egy élt akkor tekintünk ,,olcsónak", ha a költsége legfeljebb c, akkor az olcsó élek halmaza E_c és az olcsó élek gráfja pedig G_c. Ezzel a szóhasználattal élve a fenti Lemma úgy szól, hogy ha az F élhalmaz olcsó élei az olcsó élek gráfjának feszítő erdejét alkotják minden c esetén, akkor F egy minimális költségű feszítő erdő G-ben.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i) > k(f'_i) = c$. Ekkor $|E_c \cap F| < i$, így a feltevés miatt $E_c \cap F$ a G_c egy i-nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az $f'_1, f'_2, \ldots, f'_i$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c \cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f'_1, f'_2, \ldots, f'_i$ nem lehet körmentes, így $f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell$ sem. Ez ellentmondás. Tehát $k(f_i) \leq k(f'_i)\ \forall i$. Ezért $k(F) = \sum_{i=1}^{\ell} k(f_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} k(f'_i) = k(F')$. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. A Megfigyelés miatt $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra, ezért a Lemma szerint $k(F) \leq k(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: $\Leftarrow$: Ha F' minden c-re tartalmazza G_c egy feszítő erdejét, akkor a Lemma miatt F' a G minimális költségű erdeje.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz:

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: $\Rightarrow$: Indirekt. Tfh $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. A Megfigyelés miatt $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje, ezért $|F' \cap E_c| < |F \cap E_c| =: i$. Így $k(f_i) < k(f'_i)$. Ráadásul a Lemma miatt $k(f_j) \leq k(f'_j)\ \forall j$. Így aztán $k(F) < k(F')$, tehát F' nem minimális költségű feszítő erdő. $\lightning$ $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban. Összefüggő G gráf esetén a (2) következmény G minimális költségű feszítőfáit karakterizálja.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés.

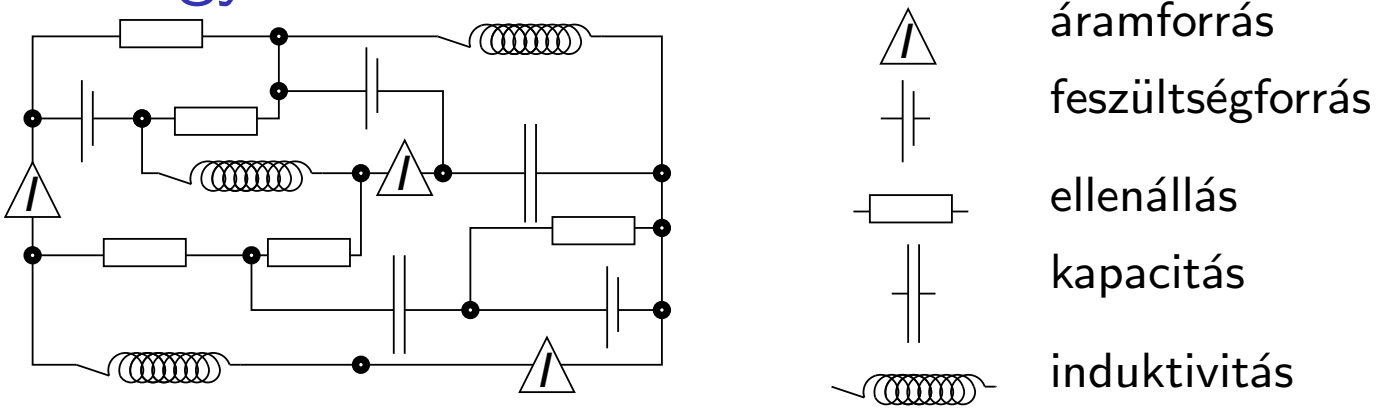
Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

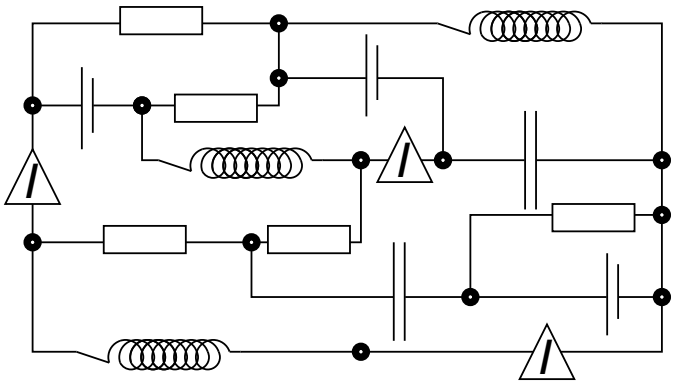
1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés.
A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$-mel.

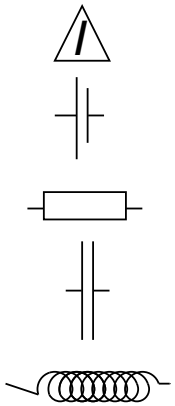
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

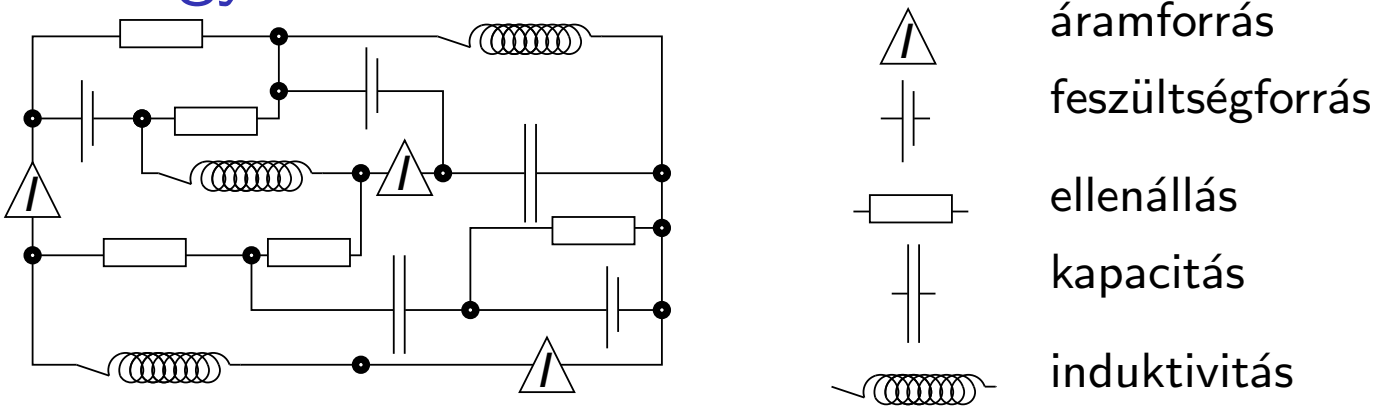
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

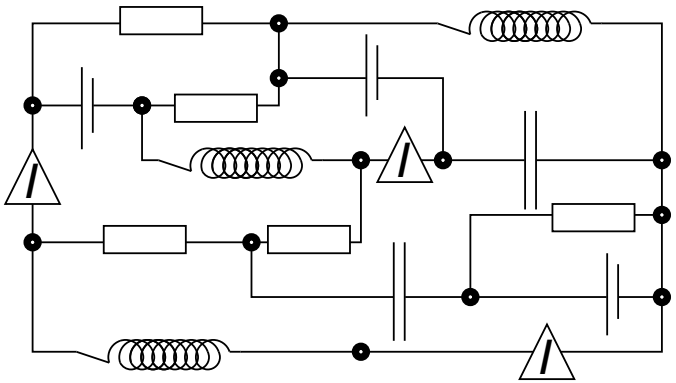


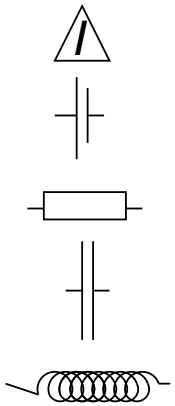
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





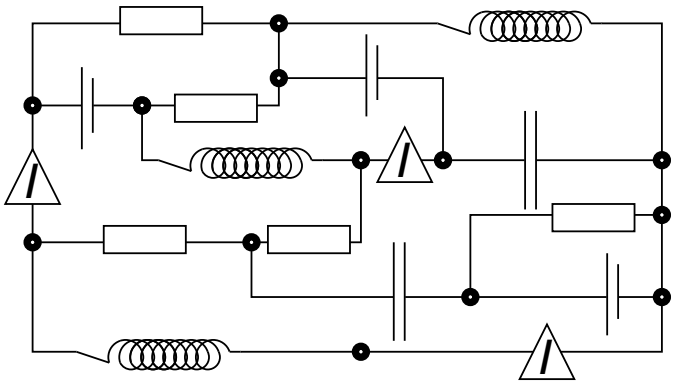
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

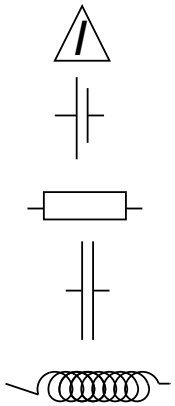
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat?

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





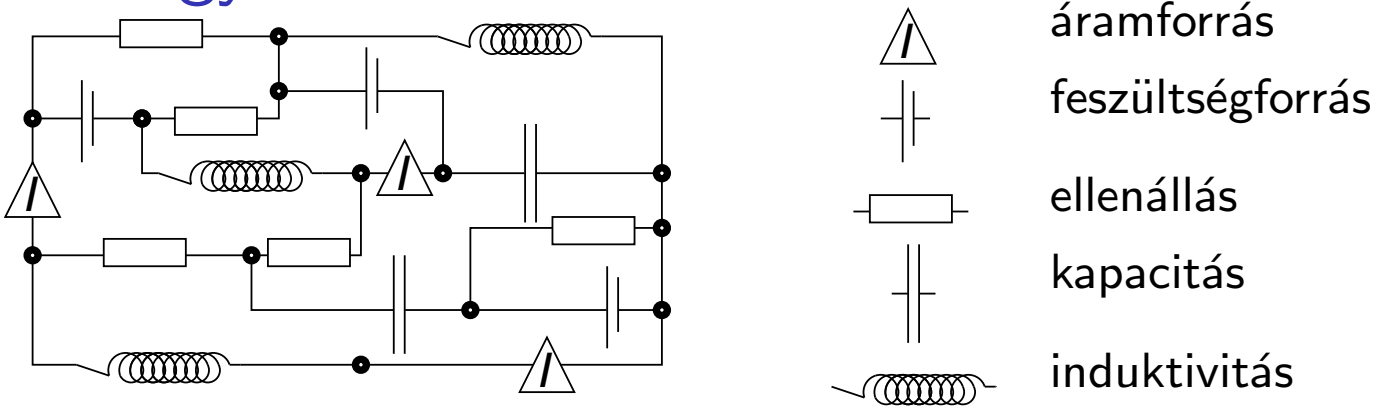
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

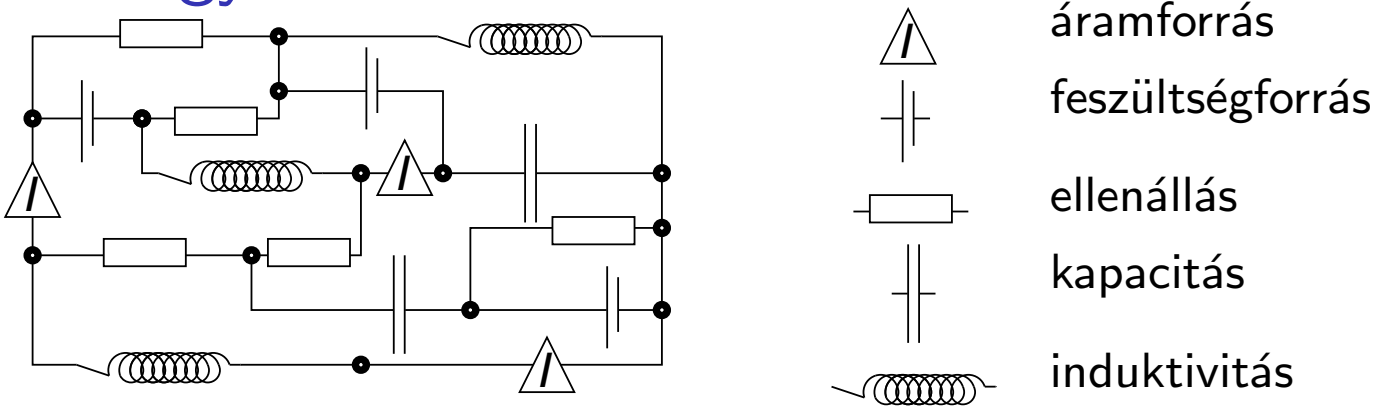
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



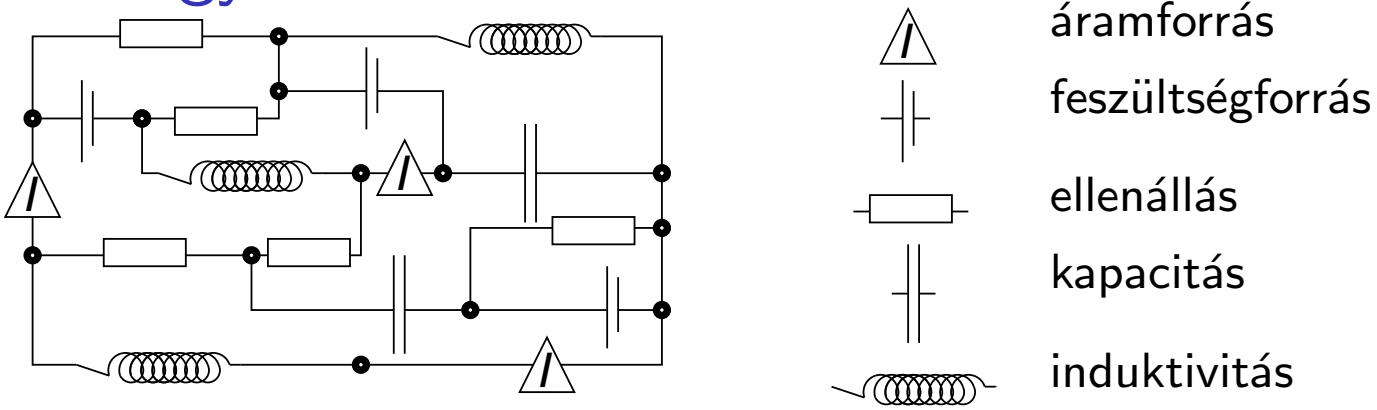
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



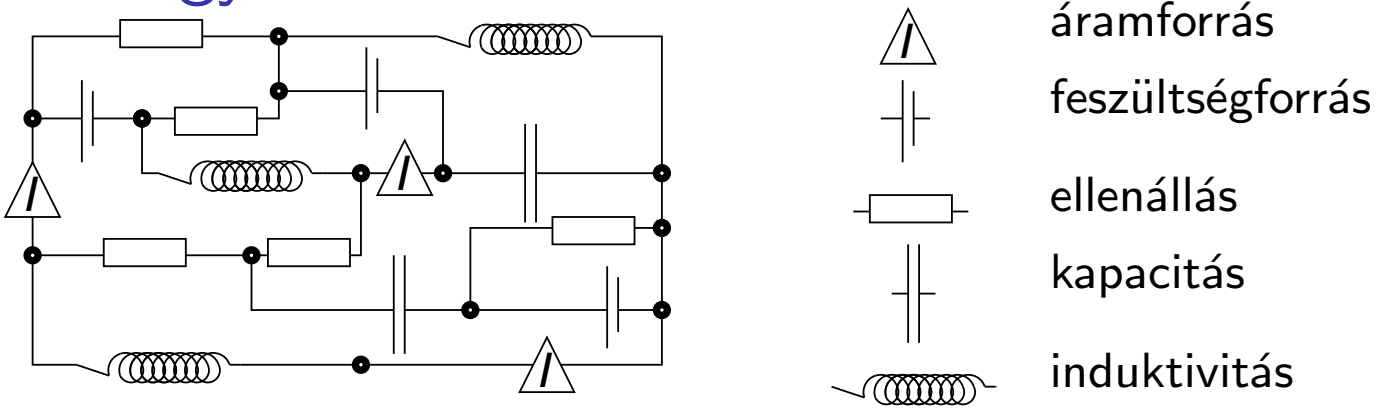
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Nem egyértelmű a megoldás pl akkor, ha G-ben van olyan kör, ami kizárólag feszültségforrásokat tartalmaz. (Ha u.i. a feszültségek előjeles összege nem 0, sérül a huroktörvény, így nincs megoldás, ha pedig ez az összeg 0, akkor viszont nem egyértelmű a megoldás, hiszen bármely megoldásból kapható egy másik, ahol ezen kör mentén valamekkora áramot körbeküldünk.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



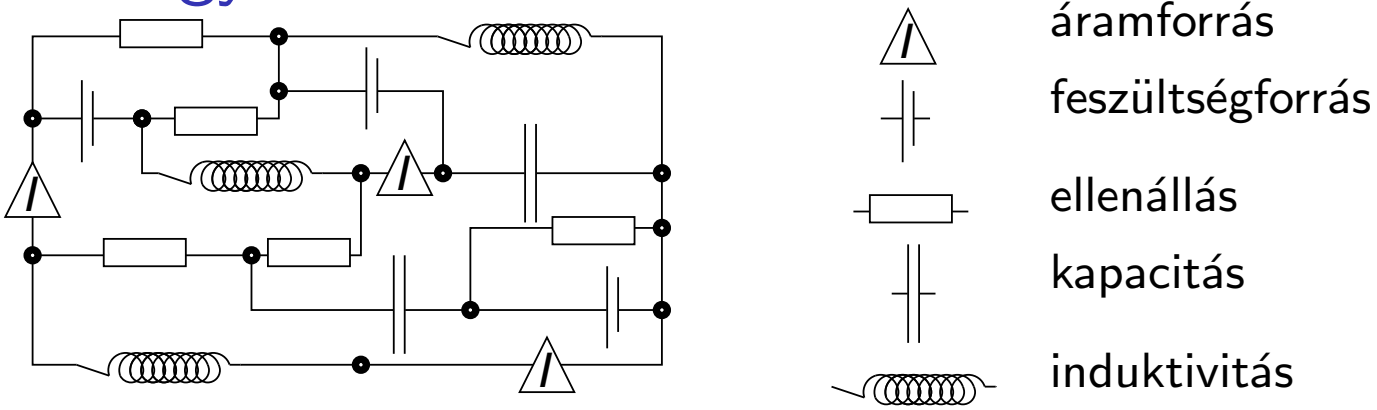
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



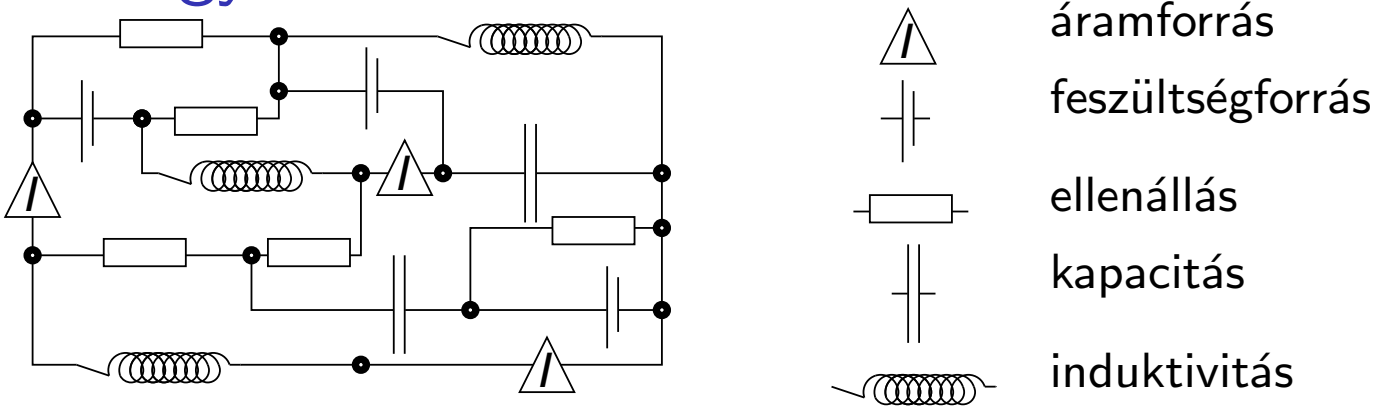
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Szintén nem egyértelmű a megoldás akkor, ha G csúcsai két részre oszthatók úgy, hogy a két rész közt futó éleken kizárólag áramforrások vannak. (Ha az áramok előjeles összege nem 0, akkor a csomóponti törvény sérül, ha viszont 0, akkor bármely megoldásban az egyik rész potenciálját konstanssal megemelve egy másik megoldást kapunk.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



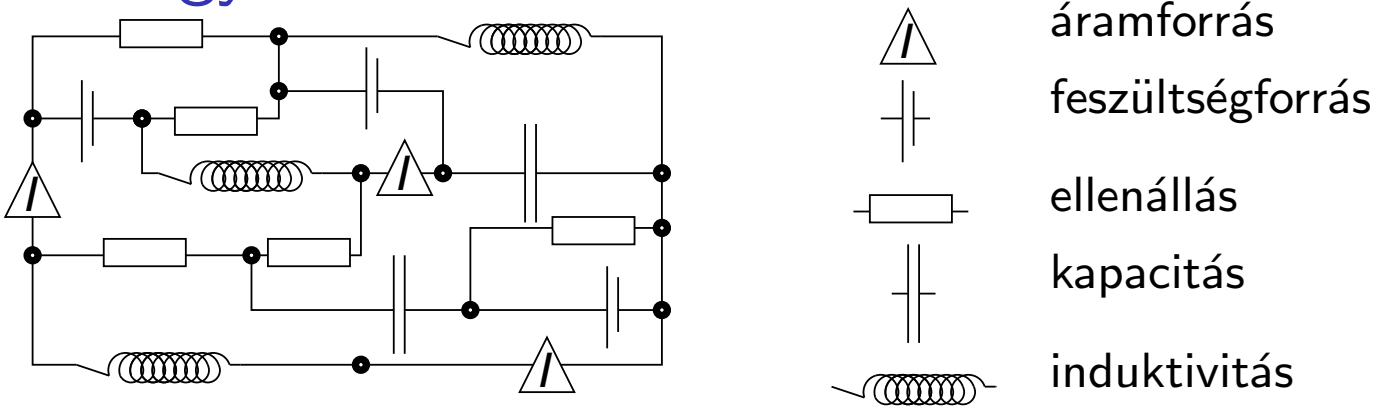
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



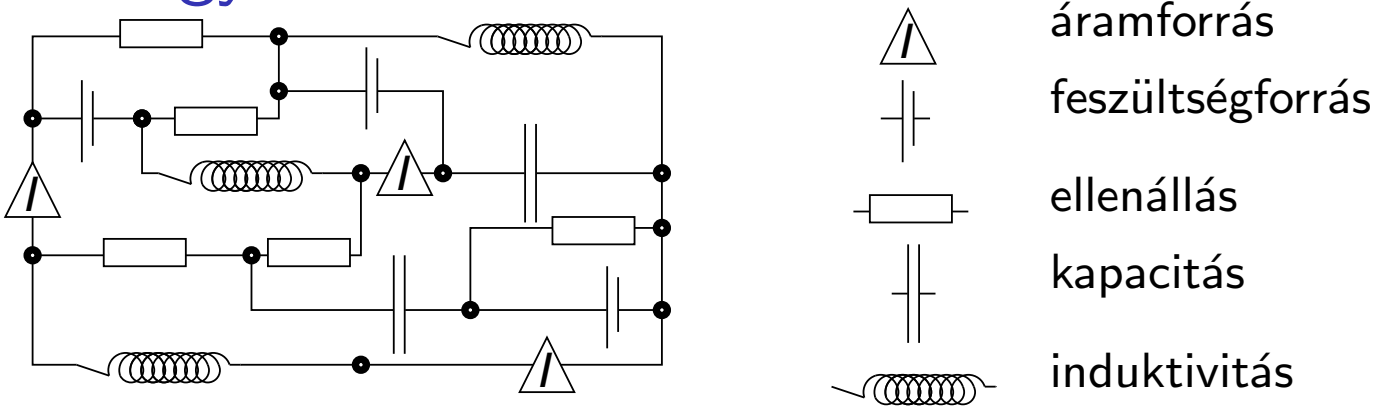
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes". Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett a legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



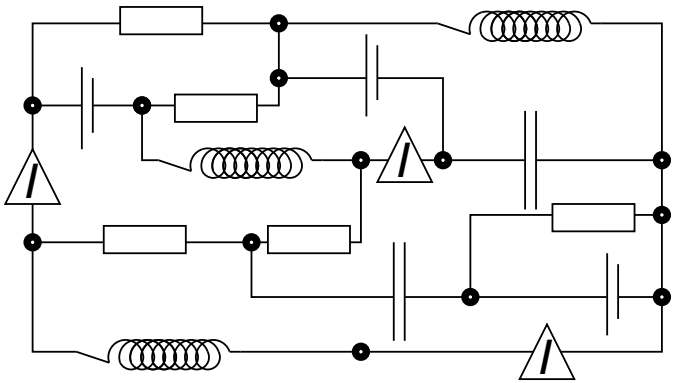
Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes". Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett a legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza). (Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírt hurok- ill. csomóponti törvények meghatározzák a megoldást.)

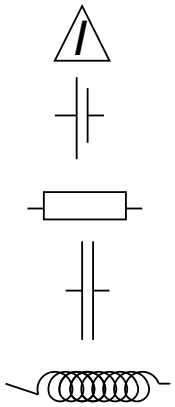
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes". Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett a legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





Mikor ,,értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes". Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett a legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa. Ekkor egyértelmű a megoldás, és ,,értelmes" a hálózat.

Köszönöm a figyelmet!