

# VISZAA07 vizsgatematika a Számítástudomány alapjai c. tárgyhoz

a 2022/2023-as tanév I. félévre

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. Az aláhúzottakat bizonyítottuk, a *dőlten* szedettek nem. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell tudni bizonyítást.

1. Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, véges gráf, komplementer gráf, reguláris gráf, él/cúcstörítés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens. **Kézfogás-lemma, élhozzáadási lemma** erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, erdők élszáma.
2. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások. **Minimális költségű feszítőfa**, mkkfák struktúrája, **Kruskal-algoritmus helyessége**, villamos hálózathoz tartozó normál fa keresése.
3. Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrendek ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.
4. Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, nemnegatív és konzervatív hosszfüggvény, triviális és pontos  $(r, \ell)$ -**felső becslés, élmenti javítás**. **Dijkstra-algoritmus működése**, Ford és Floyd algoritmusai, ezen algoritmusok helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fájának létezése.
5. **Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel), alapkörrendszer. **DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.
6. **Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörítés után (Petersen-gráf) ill. **Dirac, Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chvátal-lezárt.
7. **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**, következményei. Az **Euler-féle poliédertétel**, duális kézfogáslemma és következményei: felső korlátok az élszáma és a minimális fokszámra egyszerű, síkbarajzolható gráfokon.
8. **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **soros bővítés, Kuratowski-tétel könnyű iránya**. **Síkbarajzolt gráf duálisa**, a duális paraméterei. Vágás, elvágó él, soros élek. *Kör-vágás dualitás*, különféle élek duálisai. Whitney két tétele, Whitney operációk.
9. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorkvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal**. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrix esetén**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**, összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között.
10. Az  $\mathbb{R}^n$  tér, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, altér metszete, generátorrendszer, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátorrendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye. ESÁ hatása a sor- és oszlopvektorokra, **oszlopvektorok lin.ftn-ségének eldöntése**.
11. **Altér bázisa, bázis előállítása generátorrendszerből** ill. homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén. Generátorrendszerből homogén lin.egyenletrendszer előállítása. **Altér dimenziójának jóldefináltsága**,  $\mathbb{R}^n$  **standard bázisa, bázishoz tartozó koordinátavektor kiszámítása**.
12.  $n$  elem permutációja, a permutáció **inverziószáma**. **Bástyaelhelyezés**, inverzióban álló bástyapárok, **determináns**. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **felső háromszögmátrix determinánsa**, **ESÁ hatása a determinánusra**, **előjeles aldetermináns, kifejtési tétel**.
13. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai. **A mátrixszorzat sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata. **Lineáris leképezések és mátrixszorzások kapcsolata**. **Lineáris leképezés mátrixának meghatározása**. Leképezések egymásutánjának mátrixa, mátrixszorzás asszociativitása.
14. **Mátrix jobb- és balinverze, balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszlopokkal ill. RLA mátrix segítségével. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és kiszámítása. Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele  $n \times n$  együtthatómátrix esetén.