A számítástudomány alapjai

Minimális költségű feszítőfák

2022. szeptember 13.

Emlékeztető

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket kiszínezzük az ÉHL szerint. A zöld élek a G feszítőfáját adják.

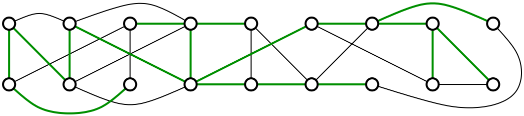
Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket kiszínezzük az ÉHL szerint. A zöld élek a G feszítőfáját adják.
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.

Emlékeztető

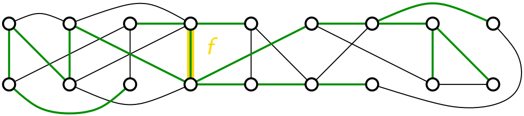
- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket kiszínezzük az ÉHL szerint. A zöld élek a G feszítőfáját adják.
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.
- Az ÉHL „fordítottját” használva pedig az látszik, hogy ha egy kör élét töröljük, akkor nem változnak a komponensek. Ezért úgy is található feszítőfa (vagy feszítő erdő), hogy addig törlünk körbeli élt, amíg van kör a gráfban.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

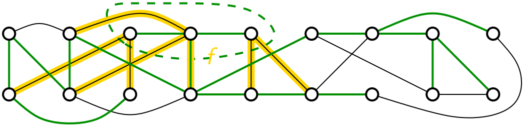
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

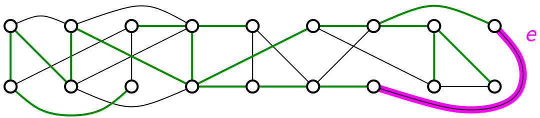
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

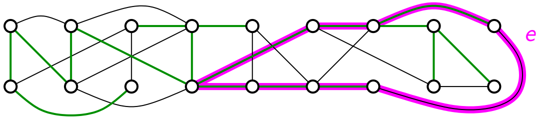
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

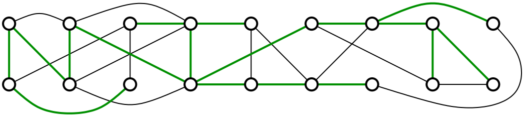
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



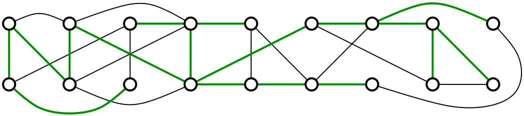
Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F rögzített feszítőfája. Ekkor G minden éléhez F meghatározza G éleinek egy fontos részhalmazát. Attól függően, hogy az adott él F-hez tartozik-e vagy sem, különböző fajta részhalmazról van szó.

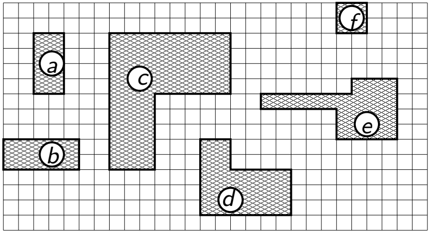
Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó alapkör pedig az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor ($F - f + e$ ffa) $\iff$ (f benne van e alapkörében) $\iff$ (e benne van f alap vágásában).

Köv: Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ alapkörét e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alapvágása e-t tartalmazza.

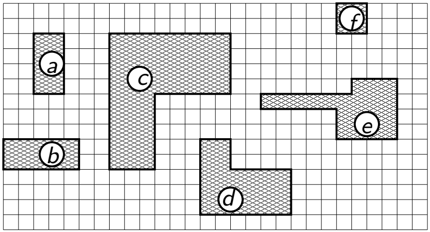
Az $f \in F$ alap vágását f mellett a G azon élei alkotják, amelyek alapköre f-t tartalmazza.

Egy gyakorlati probléma

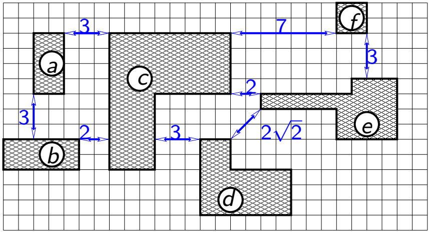


A Guváti vállalat piripócsi üzemében álló fém konténereket kell leföldelni, azaz mindegyiket összekötni az f földelési ponttal. Ennek során egy konténer egy másik, már földelt konténerhez is hozzácsatlakoztatható. Hogyan lehet ezt a feladatot úgy megoldani, hogy a lehető legkevesebb földelővezetéket használjuk? (A vezetékeket csak két konténer összekötésére vagy valamelyik konténer földelési ponthoz történő bekötéséhez használhatjuk.)

Egy gyakorlati probléma

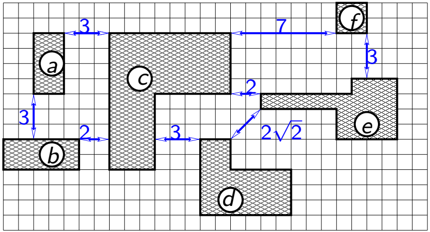


Egy gyakorlati probléma



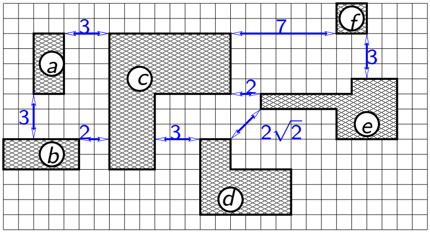
- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.

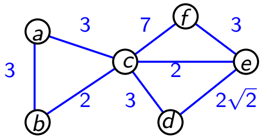
Egy gyakorlati probléma



- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.

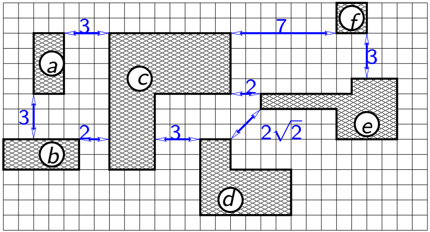
Egy gyakorlati probléma

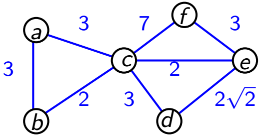




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.

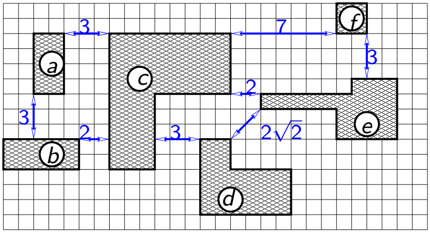
Egy gyakorlati probléma

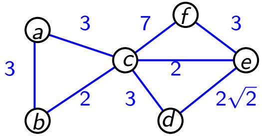




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből minden más csúcsba el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.

Egy gyakorlati probléma





- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből minden más csúcsba el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
- A kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G=(V,E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F)=\sum_{f\in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V,F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \le k(F')$ teljesül a G bármely (V,F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Az $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $k(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $k(F) \leq k(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉHL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.
Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

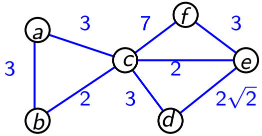
$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

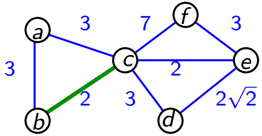
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

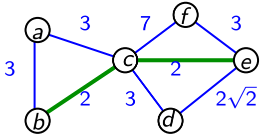
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

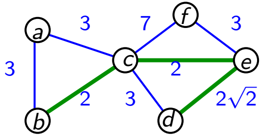
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

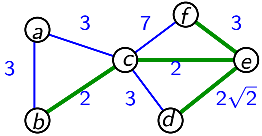
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

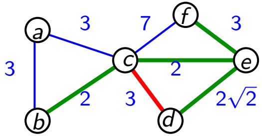
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

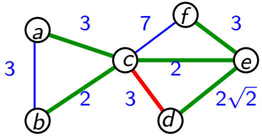
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

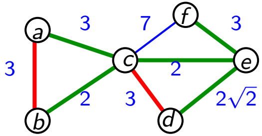
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

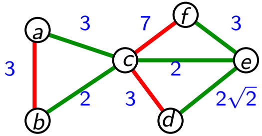
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

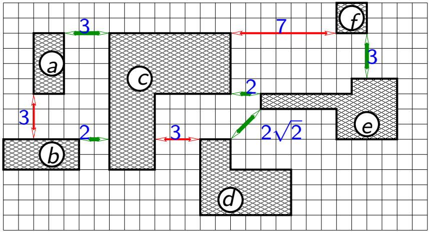
Kruskal-algoritmus egy példán

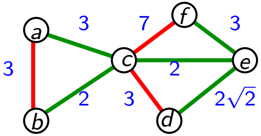


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

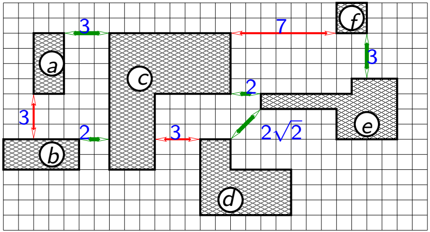


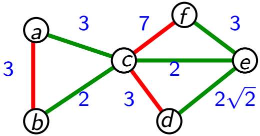


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán





Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Világos, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál. (Ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.)
A kérdés az, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. feszítő erdőt) ad-e.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Biz: A Kruskal-algortimus a legfeljebb c költségű (E_c-beli) éleket hamarabb dolgozza fel, mint a c-nél drágábbakat. Ezért E_c összes élének feldolgozása után pontosan azt az állapotot érjük el, mintha a Kruskal-algoritmust a G_c gráfon futtattuk volna. Korábban (az ÉHL előtt) láttuk, hogy az utóbbi algoritmus outputja G_c egy feszítő erdeje. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Mkffák struktúrája

$G=(V,E)$ gráf és $k:E\to\mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c:=\{e\in E:k(e)\le c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c\ge 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F=\{f_1,f_2,\dots,f_\ell\}$, $k(f_1)\le k(f_2)\le\dots\le k(f_\ell)$ és $F\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c\ge 0$-ra. Tfh $F'=\{f_1',f_2',\dots,f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1')\le k(f_2')\le\dots\le k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i)\le k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1\le i\le\ell$ esetén, így $k(F)\le k(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i)>k(f_i')=c$. Ekkor $|E_c\cap F|<i$, így a feltevés miatt $E_c\cap F$ a G_c egy i-nél kevesebb élű feszítő erdeje. Az $f_1',f_2',\dots,f_i'$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c\cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f_1',f_2',\dots,f_i'$ nem lehet körmentes, így $f_1',f_2',\dots,f_\ell'$ sem. Ez ellentmondás. Tehát $k(f_i)\le k(f_i')$ $\forall i$. Ezért $k(F)=\sum_{i=1}^{\ell}k(f_i)\le\sum_{i=1}^{\ell}k(f_i')=k(F')$. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \le c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \ge 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \le k(f_2) \le \ldots \le k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \ge 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \le k(f'_2) \le \ldots \le k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \le k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \le i \le \ell$ esetén, így $k(F) \le k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

$G=(V,E)$ gráf és $k:E\to\mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c:=\{e\in E: k(e)\le c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c\ge 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_\ell\}$, $k(f_1)\le k(f_2)\le\ldots\le k(f_\ell)$ és $F\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c\ge 0$-ra. Tfh $F'=\{f'_1,f'_2,\ldots,f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1)\le k(f'_2)\le\ldots\le k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i)\le k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1\le i\le\ell$ esetén, így $k(F)\le k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. A Megfigyelés miatt $F\cap E_c$ a G_c feszítő erdeje $\forall c\ge 0$-ra, ezért a Lemma szerint $k(F)\le k(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.
Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: A Lemma bizonyítja az elégségességet.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.
Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.
Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.
(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.
Biz:

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

Biz: A szükségességhez tfh $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje, ezért $|F \cap E_c| > |F' \cap E_c|$, így $k(f_i) < k(f'_i)$ teljesül legalább egy i-re, és minden j-re $k(f_j) \leq k(f'_j)$. Innen $k(F) < k(F')$. □

Mkffák struktúrája

$G=(V,E)$ gráf és $k:E\to\mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c:=\{e\in E: k(e)\le c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c\ge 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_\ell\}$, $k(f_1)\le k(f_2)\le\ldots\le k(f_\ell)$ és $F\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c\ge 0$-ra. Tfh $F'=\{f'_1,f'_2,\ldots,f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1)\le k(f'_2)\le\ldots\le k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i)\le k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1\le i\le\ell$ esetén, így $k(F)\le k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F'\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c\ge 0$-ra.

Mkffák struktúrája

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Megf: A G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja tartalmazza G_c egy feszítő erdejét minden $c \geq 0$ esetén.

Lemma: Tfh $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$, $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$ és $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje $\forall c \geq 0$-ra. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $k(F) \leq k(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz pontosan akkor minimális költségű feszítő erdeje G-nek, ha $F' \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G feszítő erdeje a G feszítő fája, így a Kruskal-algoritmus mkffát talál. A (2) következmény pedig G mkffáit karakterizálja.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. n csúcsú G gráf esetén egy élről döntés megoldható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is.
Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés.

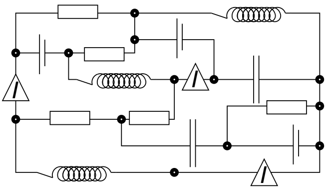
Az ötödik elem

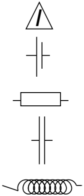
Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés az egyes élekről a fenti sorrendben.

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. n csúcsú G gráf esetén egy élről döntés megoldható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben az adatstruktúra karbantartásával együtt is.
Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot n \cdot \log_2 n$ lépés.
A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n+m) \cdot \log_2(n+m)$-mel.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

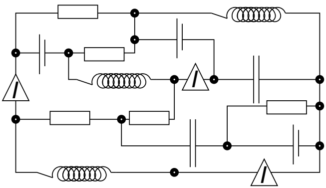


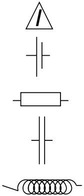


- áramforrás
- feszültségforrás
- ellenállás
- kapacitás
- induktivitás

Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

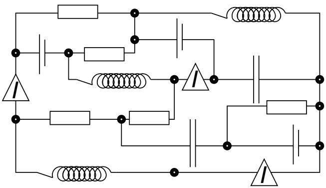
ellenállás

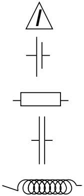
kapacitás

induktivitás

Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

kapacitás

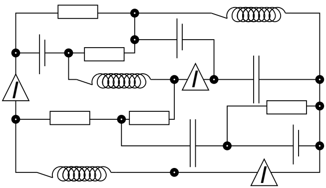
induktivitás

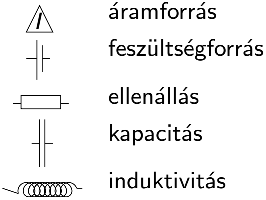
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

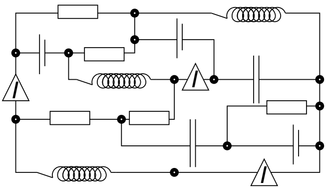
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

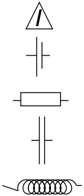




Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.
Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.
Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás
feszültségforrás
ellenállás
kapacitás
induktivitás

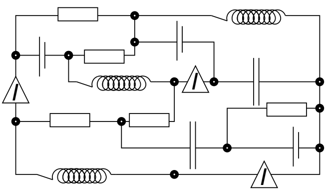
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Az, hogy mi történik (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), a Kirchhoff- ill. Ohm-törvényekkel írható le.

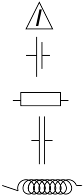
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

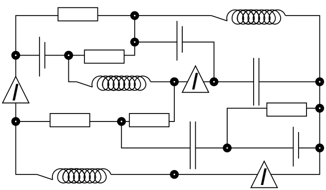


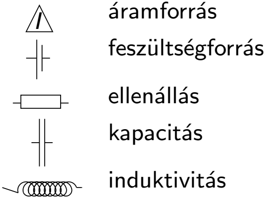


- áramforrás
- feszültségforrás
- ellenállás
- kapacitás
- induktivitás

Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

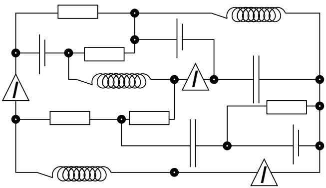
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

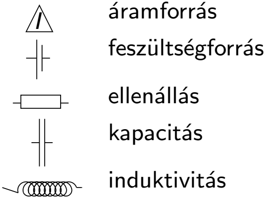




Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Nem egyértelmű a megoldás akkor, ha G-ben van olyan kör, ami kizárólag feszültségforrásokat tartalmaz. (Ha u.i. a feszültségek összege nem 0, sérül a huroktörvény, így nincs megoldás, ha pedig 0, akkor nem egyértelmű a megoldás, mert bármely megoldásból kapható egy másik, ahol a kör mentén valamekkora áramot körbeküldünk.)

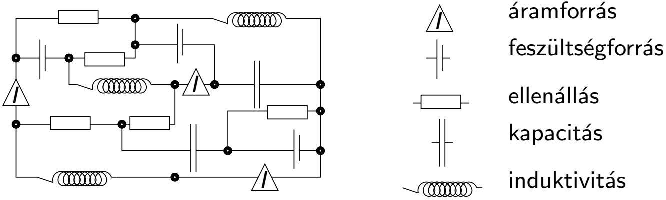
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





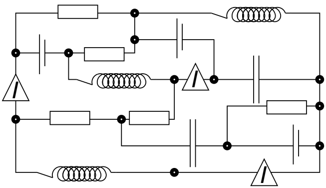
Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

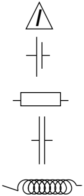
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Szintén nem egyértelmű a megoldás akkor, ha G csúcsai két részre oszthatók úgy, hogy a két rész közt futó éleken kizárólag áramforrások vannak. (Ha az áramok összege nem 0, akkor a csomóponti törvény sérül, ha 0, akkor bármely megoldásban az egyik rész potenciálját konstanssal megemelve egy másik megoldást kapunk.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

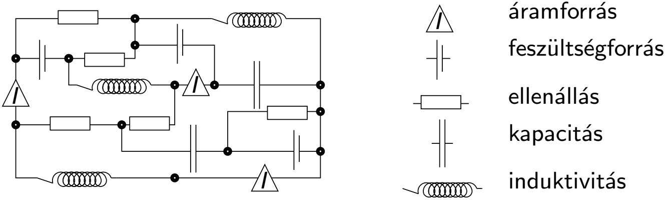
ellenállás

kapacitás

induktivitás

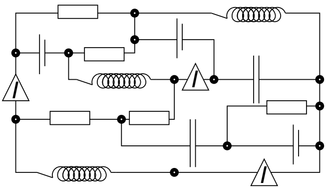
Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

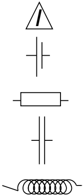
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

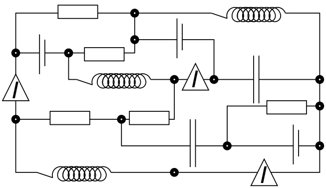


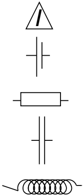


áramforrás
feszültségforrás
ellenállás
kapacitás
induktivitás

Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek a bizonyítéka a normál fa: *G* olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza). (Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírva a hurok- ill. csomóponti törvényeket, az egyértelmű megoldás már megkapható.)

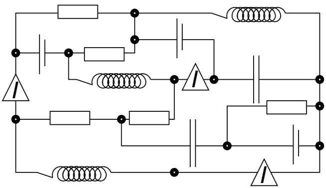
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

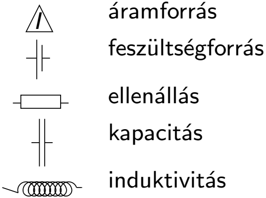




Mikor „értelmes" egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes". Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat? Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Bizonyítható, hogy ha a fenti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek a bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami minden feszültségforrást tartalmaz, de egyetlen áramforrást sem (és mindemellett a legtöbb kapacitást és a lehető legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa és egyértelmű a megoldás „értelmes” a hálózat.

Köszönöm a figyelmet!