A számítástudomány alapjai

Az $\mathbb{R}^n$ tér alaptulajdonságai

2022. október 25.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ , ill. } \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ utóbbi}$$

esetben az 1-es felülről az i-dik helyen áll.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

A vektorok tehát itt és most nem ,,irányított szakaszok", hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak: az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de egy vektor a mi tárgyalásunkban nem feltétlenül irányított szakasz.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Példa:

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, akkor $\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

Példa:

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

(4) $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemire és a fenti két műveletre gondolunk.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

(4) $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemire és a fenti két műveletre gondolunk.

(5) $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ elemei természetes módon megfeleltethetők a sík, ill. a 3 dimenziós tér pontjainak. Ez segíthet abban, hogy valamiféle szemléletes képet kapjunk az n magasságú vektorokról tanultakról.

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociativitás)

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociativitás)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppan a valós számokra vonatkozó jól ismert szabályok. $\square$

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociativitás)

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociativitás)

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Ezzel a vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (másik asszociativitás)

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Ezzel a vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

Ezek szerint a vektorokkal történő számolási szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra), azaz az altér def.ható az $\mathbb{R}^n$ lineáris kombinációra zárt részhalmazaként.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Biz: Triviális. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Példa:
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ az origón átmenő 2-meredekségű egyenes.
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$, ill. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ ahol $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i$.
Konvenció: $\langle \emptyset \rangle := \{\underline{0}\}$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.

Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Def: $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Biz: Zárt az összeadásra: $(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) + (\kappa_1 \underline{x}_1 + \ldots + \kappa_k \underline{x}_k) = (\lambda_1 + \kappa_1)\underline{x}_1 + \ldots + (\lambda_k + \kappa_k)\underline{x}_k \in V$. Skalárral szorzás: $\lambda \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) = \lambda\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda\lambda_k \underline{x}_k \in V$. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.

Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
Biz: Műveletzártság: $\underline{x}, \underline{y} \in V_i \ \forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V_i \ \forall i$. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \; \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. **Biz:** $\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$ ill. $\lambda\underline{0}=\underline{0}$, zárt a műveletekre. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Biz:** $\mathbb{R}^n$ zárt a műveletekre. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér a $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

Ha $\mathbb{R}^2$-ben két vektor nem párhuzamos, akkor generátorrendszert alkotnak, hiszen bármely vektor előállítható a lineáris kombinációjukból. (Ehhez a két vektort az origóval összekötő egyenesekre kell a ,,másik'' vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó vektort.)

Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin. ftn $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-dik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$, tehát a lineáris kombináció triviális.
Ha $\mathbb{R}^2$-ben két vektor akkor lin.öf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek
$\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Megj: A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.öf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lin.ftn (lin.öf vagy generator-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Biz: Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:
$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \left(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k \right)$.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Biz: Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből: $\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \left(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k\right)$.

Most tfh valamelyik x_i előáll a többi lineáris kombinációjaként: $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként:

$\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. $\square$

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség és genárálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t. (ábra)
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V$ és $\underline{v} \in \langle G \rangle$.
$\Leftarrow$: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$.
Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$.
Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$.
Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bmely $\underline{u} \in V$-re igaz, így $\langle G \rangle = V$. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor
$(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$
Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor
$(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$
Megj: A lemma szerint ftn halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a ftn rendszer lin.komb-jaként.
A $\Leftarrow$ irányt az ,,újonnan érkező vektor lemmájának" is nevezik.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor
$(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor
$(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Megj: A lemma szerint ftn halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a ftn rendszer lin.komb-jaként.
A $\Leftarrow$ irányt az „újonnan érkező vektor lemmájának" is nevezik.

Biz: $\Rightarrow$: Ha $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn., akkor $\underline{f}$ nem áll elő F-beliek lin.komb.-jaként, azaz $\underline{f} \notin \langle F\rangle$.
$\Leftarrow$: Thf $\lambda\underline{f} + \lambda_1\underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{f}_k = \underline{0}$.
Ha $\lambda = 0$, akkor a BO az $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k$ vektorok lin.kombinációja, így F lin.ftnsége miatt $\lambda_i = 0\ \forall i$. Tehát $\underline{0}$ csak triviálils lin.komb.ként áll elő, vagyis $F \cup \{\underline{f}\}$ csakugyan lin.ftn.
Ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor $\underline{f}$ kifejezhető az F-beliekkel:
$\underline{f} = \frac{-\lambda_1}{\lambda}\underline{f}_1 + \ldots + \frac{-\lambda_k}{\lambda}\underline{f}_k$. Ez lehetetlen, hisz $\underline{f} \notin \langle F\rangle$. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\, \underline{f} \in F\ \exists\, \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható a V generátorrendszer egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható a V generátorrendszer egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Biz: Indirekt bizonyítunk. Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Mivel F lin.ftn, ezért $\underline{f} \notin \langle F'\rangle$. Ha $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.öf lenne minden $\underline{g} \in G$-re, akkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F\rangle$ teljesülne minden $\underline{g} \in G$-re. Ez azt jelenti, hogy $G \subseteq \langle F'\rangle$, vagyis $\langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle$. Ezt felhasználva $\underline{f} \in V = \langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle \not\ni \underline{f}$ adódik, ami ellentmondás. Az indirekt feltevés megdőlt: van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor
$(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$
Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor
$(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$
Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\, \underline{f} \in F\ \exists\, \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\, \underline{f} \in F\ \exists\, \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer sosem nagyobb, mint egy generátorrendszer.

Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \not\subseteq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az F_2, $F_3, \ldots,$ lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \ldots = |F_i| \leq |G|$, győztünk. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor
$(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$
Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor
$(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$
Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.
FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\, \underline{f} \in F\ \exists\, \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F\rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor
$(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$
Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. Ekkor
$(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$
Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.
FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.
Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.
Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F\rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.
Biz: Mivel $f \in \langle F\rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lin.komb.-jaként. Tfh $\underline{f} = \lambda_1\underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{f}_k = \mu_1\underline{f}_1 + \ldots + \mu_k\underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.
Mivel F lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i\ \forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lin.komb-jaként. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, $S' \subseteq \langle S \rangle$, így $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$, és a két megfigyelésből $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ adódik. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Biz: Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \ldots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Biz:

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Biz: $\Rightarrow$: A fenti lineáris összefüggés M-re pontosan azt jelenti, hogy a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletnek M minden sora megoldása. Nekünk pedig azt kell igazolni, hogy ugyanezt az egyenletet az ESÁ után kapott M' minden sora is megoldja. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \ldots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai.

$$\begin{array}{rrrr|}
1 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -2 & 0 \\
1 & 4 & 0 & 5 \\
2 & 3 & 3 & 1
\end{array}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{array}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\left.\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \ldots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn. rendszert alkotnak-e az alábbi mátrix oszlopai. Megoldás: ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|}
1 & 0 & 0 & -7 \\
0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

A kapott mátrixra $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$, ezért ugyanez a lineáris összefüggés a kiindulási mátrixra is igaz, tehát nem voltak lin.ftn-ek az oszlopok.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \ldots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen vektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \iff (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i)$.

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha megkapható az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával. Minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lin.komb-ja.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- ESÁ hatása a sorokra ill. oszlopokra.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- ESÁ hatása a sorokra ill. oszlopokra.
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- ESÁ hatása a sorokra ill. oszlopokra.
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága.

Köszönöm a figyelmet!