A számítástudomány alapjai

Mátrix rangja és inverze

2022. november 29.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása'' is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása" is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása'' is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés „megfordítása" is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Biz: $A^B = A^B I_n = A^B(AA^J) = (A^B A)A^J = I_n A^J = A^J$. $\square$

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása'' is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^BA = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása'' is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása'' is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Biz: Később bizonyítjuk.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy egy mátrixra gondolhatunk úgy is, mint egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin.lekép-re. Ha egy ilyen leképezés külcsönösen egyértelmű (mint pl. a síkban az origó körüli forgatás, vagy origónra illeszkedő egyenesre tükrőzés, stb), akkor a leképezés ,,megfordítása" is lineáris leképezés, amit egy másik mátrix ír le. Ezt a két leképezést egymás után elvégezve minden vektor helyben marad, azaz a két leképezés egymás utánjának mátrixa egyfelől az egységmátrix, másfelől pedig a két leképezés mátrixának szorzata. Nem minden leképezésnek van fordítottja, és a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mátrixok nyelvén hogyan írható le, hogy mikor van ilyen fordított, és konkrétan mi is az.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Kínzó kérdés: Miféle mátrixoknak van inverze, és hogyan lehet azt megtalálni?

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Kínzó kérdés: Miféle mátrixoknak van inverze, és hogyan lehet azt megtalálni?
Részleges válasz: Csak négyzetes mátrixnak lehet iverze.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^BA = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^BA = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok sorozata is egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok sorozata is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-zel szoroztunk balról.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^BA = I_n$.
A A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Megf: Ha A balról invertálható, akkor $A^BA = I_n$. Ezért I_n minden sora A sorainak lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak, ezért A sorainak is bázist kell alkotniuk, azaz A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok sorozata is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-zel szoroztunk balról.
Köv: Ha az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és A helyén megjelenik I_n, akkor I_n helyén A^B jelenik meg. Ha A helyén nem jelenik meg I_n, akkor A-nak nincs inverze.

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & -1 & -8 & 4 \\ & & & & & & 1 & 6 & -3 \\ & & & & & & 2 & 17 & -8 \\ \hline & & & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

győztünk, sőt: $A^B = A^J$.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -31 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -31 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -31 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -31 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Ugyanez a transzponáltra a jobbinverz létezését karakterizálja:
Köv: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oszlopai lin.ftn-ek, akkor A-nak van jobbinverze, ha pedig A oszlopai nem lin.ftn-ek, akkor nincs.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
$(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff (|A| \neq 0)$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy $(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff (|A| \neq 0)$

Biz: Legyen V az A sorai által generált altér, és A' az A-ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix). Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért A' sorai is V-t generálják. Így (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ $(\dim V = n) \iff$ (A' sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A'-nek nincs csupa0 sora) $\iff$ (A' minden sorában van v1) $\iff$ $(|A'| = 1)$ $\iff$ $(|A| \neq 0)$

Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0 voltán. □

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Biz: (A-nak van balinverze) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ ($|A^\top| \neq 0$) $\iff$ ($A^\top$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (A-nak van jobbinverze) $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\Longleftrightarrow$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\Longleftrightarrow$ (A-nak van jobbinverze)

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\Longleftrightarrow$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\Longleftrightarrow$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Biz: Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz $a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha $i = j$, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis $|A|$. Ha $i \neq j$, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy az i-dik sor helyére a j-diket írjuk. Mivel A'-nek van két egyforma sora, ezért $|A'| = 0$. $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Biz: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|}B\right) = \frac{1}{|A|}(AB) = \frac{1}{|A|}(|A|I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$ $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix reguláris (avagy invertálható), ha A-nak van inverze, és szinguláris ha nincs.
Köv: Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Mátrix rangja

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk $n < k$ és egy $n \times k$ méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok n magasságú vektorok, tehát legfeljebb n lehet közülük független, k semmiképp.

Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. Megmutatjuk, hogy ha egy M mátrixnak van k lin.ftn sora, akkor van k lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

Mátrix rangja

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Biz: (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.
(2) A sorok által generált altér egy bázisát választhatjuk a sorvektorokból. Ez a bázis a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza. Ezért ennek a bázisnak az elemszáma $s(A)$, vagyis a sorvektorok által generált altér dimenziója.
Az oszlopokra vonatkozó állítást hasonló érvelés igazolja. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz: Láttuk, hogy ESÁ során a sorok által generált altér nem változik, így a dimenziója is ugyanannyi marad.
ESÁ hatására az oszlopok közti lineáris összefüggések sem változnak, ezért oszlopok egy halmaza pontosan akkor lin.ftn ESÁ előtt, ha ugyanezen oszlophalmaz lin.ftn ESÁ után. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így $o(A)$ a v1-ek száma.
RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért $s(A)$ is a v1-ek száma, tehát $s(A) = o(A)$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$. □

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz: $\Rightarrow$: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor $k = s(A') = o(A')$: A'-nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A'' mátrixot. Így $o(A'') = k = s(A'')$, tehát A'' az A egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa, azaz $d(A) \geq k$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz:

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz: $\Leftarrow$: Tfh A'' egy k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis $s(A) \geq k$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Biz: Ha $s(A) = k$, akkor az előző állítás miatt $d(A) \geq k$.
Ha pedig $d(A) = k$, akkor $s(A) \geq k$. Ezért $s(A) = d(A)$.
Korábban láttuk, hogy $s(A) = o(A)$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Így tehát nem csak definiáltuk a rangot, hanem azt is látjuk, hogy a rangra három lényegesen különböző módon tudunk gondolni.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Rang meghatározása:

ESÁ-okkal képzett RLA mátrix v1-ei száma.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \le r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ $\Rightarrow$ $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ $\Rightarrow$ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.
Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$.
Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. $\square$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból
- Sor-, oszlop- és determinánsrang

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból
- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból
- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból
- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra

Mit tanultunk ma?

- Balinverz, jobbinverz, ha mindkettő létezik, egyenlők
- Inverzszámítás ESÁ-okkal
- Invertáltatóság és nemnulla determináns kapcsolata
- Inverzszámítás előjeles aldeterminánsokból
- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra

Köszönöm a figyelmet!