A számítástudomány alapjai

A gráfelmélet alapjai

2022. szeptember 6.

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
   (vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
   (vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú ,,építkezés")

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
   (vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú ,,építkezés")

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
   (vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés")

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: `www.cs.bme.hu/sza`

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
   (vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú ,,építkezés")

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: `www.cs.bme.hu/sza`

Segédanyagok: Előadások anyaga (pdf, teams video)
Közös gyakorlat-feladatsor tudnivalók része
Katona-Recski-Szabó (nyomtatott/elektronikus) jegyzet
NESZ (régi tárgy saját digitális jegyzete, rég volt karbantartva)
Szeszlér BSz1 jegyzet (jól átgondolt, letölthető linalg jegyzet)
Wiener BSz1 példatár (letölthető linalg példatár)
letölthető gráfelmélet példatár

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$\mathrm{ZH}_1 \geq 24$ & $\mathrm{ZH}_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$\mathrm{ZH}_1 \geq 24$ & $\mathrm{ZH}_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$\mathrm{ZH}_1 \geq 24$ & $\mathrm{ZH}_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)
Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.
(Neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 40 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)
Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.
(Neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 40 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).
Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese szóbeli pontszám (szp). (0 és 60 közé esik.)
szp$< 24 \Rightarrow$ elégtelen. Végső pontszám vp $=$ hp $+$ szp.

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)
Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.
(Neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 40 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).
Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese szóbeli pontszám (szp). (0 és 60 közé esik.)
szp$< 24 \Rightarrow$ elégtelen. Végső pontszám vp $=$ hp $+$ szp.
Konverzió:

$\geq$	0	40	55	70	85
vp	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
$<$	40	55	70	85	101

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)
Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.
(Neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 40 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).
Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese szóbeli pontszám (szp). (0 és 60 közé esik.)
szp$< 24 \Rightarrow$ elégtelen. Végső pontszám vp $=$ hp $+$ szp.
Konverzió:

$\geq$	0	40	55	70	85
vp	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
$<$	40	55	70	85	101

Ismétlő/javító vizsga: a szabad vizsgaidőpontok függvényében.

Követelmények

Számonkérések: 2 ZH (nov 3 (21), dec 1 (14)), ppZH (dec 20)
6x10 pont, 50 pont felett IMSC. ppZH: neptun, különelj. díj, 1 ZH.
$\text{ZH}_1 \geq 24$ & $\text{ZH}_2 \geq 24$ & legfeljebb 3 gyak hiányzás $\Rightarrow$ Aláírás.
Hozott pontszám (hp):
50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)
Aláírás ✓ $\Rightarrow$ szóbeli vizsga.
(Neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 40 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).
Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese szóbeli pontszám (szp). (0 és 60 közé esik.)
szp$< 24 \Rightarrow$ elégtelen. Végső pontszám vp $=$ hp $+$ szp.
Konverzió:

$\geq$	0	40	55	70	85
vp	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
$<$	40	55	70	85	101

Ismétlő/javító vizsga: a szabad vizsgaidőpontok függvényében.
Hat sikertelen vizsga után kötelező elbocsátás. (**!!!**)

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
E pedig G éleinek halmaza.

Példa:
$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Megj: Senki sem így tekint a gráfokra.

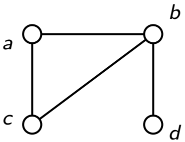
Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
E pedig G éleinek halmaza.
Példa:
$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

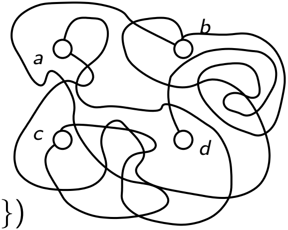
Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Példa:



Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

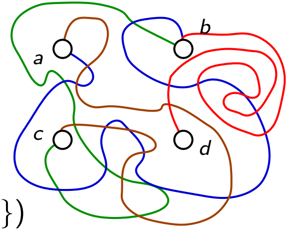
Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Példa:

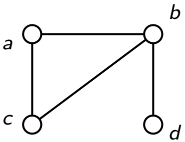


Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:



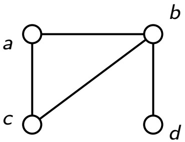
Példa:
$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:



Példa:

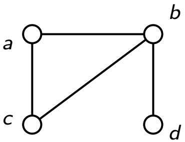
$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.
Példa: A facebook-gráf csúcsai a meta-felhasználók, élei pedig az facebook-ismeretségeknek felelnek meg.

Mi a gráf?

Def: $G=(V,E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:



Példa:

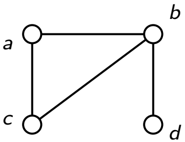
$G = (\{a,b,c,d\}, \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{b,d\}\})$

Def: A $G=(V,E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u,v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak), E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

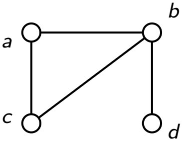


Példa:
$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

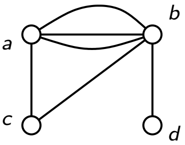
Def: A $G = (V, E)$ gráf diagramja a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük. Ekkor e az u és v csúcsokat köti össze. Továbbá u és v az e végpontjai, amelyek az e élre illeszkednek, és e mentén szomszédosak.

Multigráfok és irányított gráfok

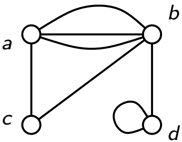


Multigráfok és irányított gráfok



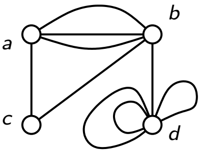
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei

Multigráfok és irányított gráfok



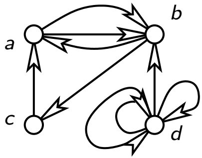
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

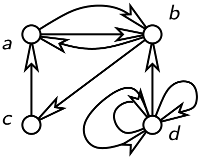
Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Multigráfok és irányított gráfok

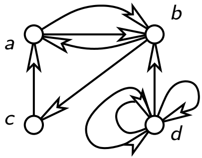


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

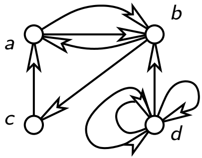
Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.
Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.
Megf: Egyik halmaz végességéből sem következik a másiké.
Megj: A végtelen gráfoknak rendkívül különös tulajdonságai lehetnek. Ezen a kurzuson csak véges gráfokkal foglalkozunk.

Multigráfok és irányított gráfok

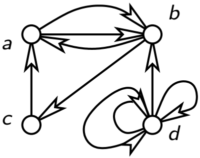


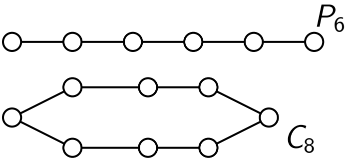
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

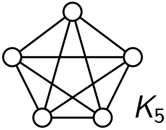
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Multigráfok és irányított gráfok







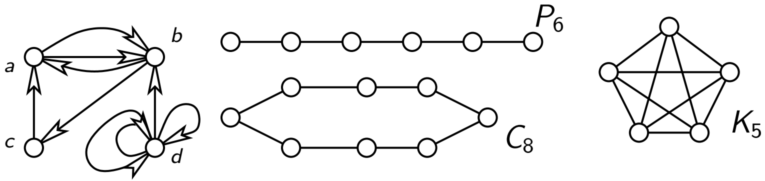
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n.

Multigráfok és irányított gráfok



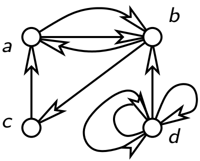
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

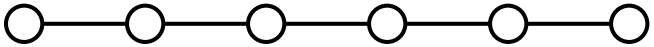
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

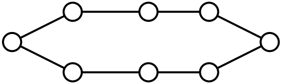
Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 =$

Multigráfok és irányított gráfok

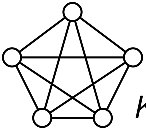




P_6



C_8



K_5

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

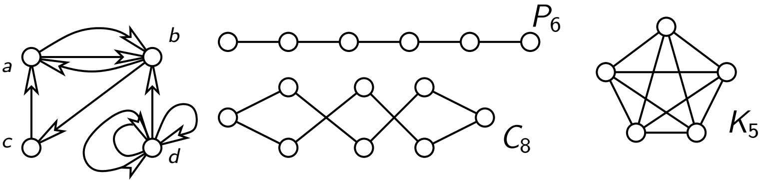
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n.

Megf: $K_2 = P_2$

Multigráfok és irányított gráfok



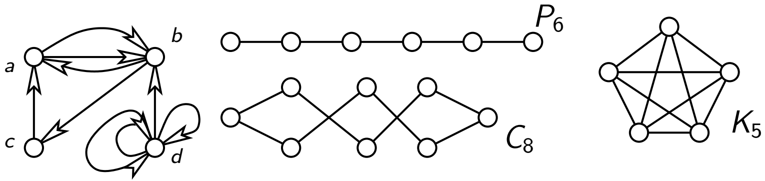
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 =$

Multigráfok és irányított gráfok



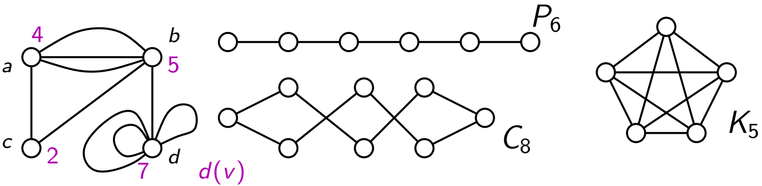
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

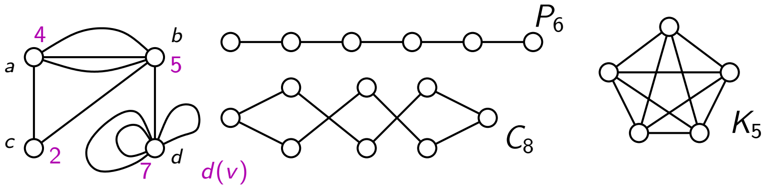
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

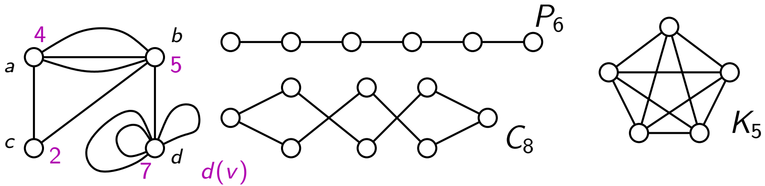
Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Példa: A facebook-gráfban $d(v)$ a v ismerőseinek számát jelenti.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

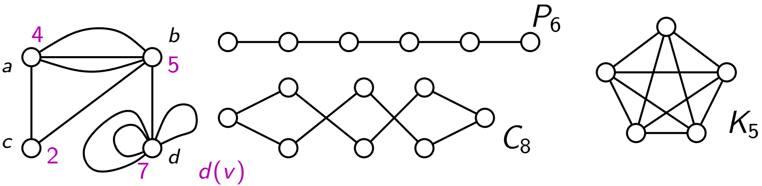
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

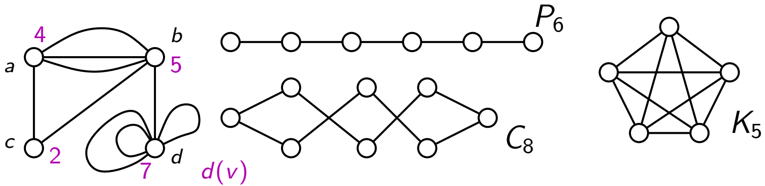
Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.
(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

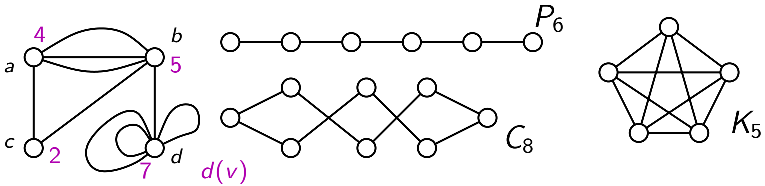
Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek párhuzamos élei, hurokélei vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az irányított gráf olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ véges gráf, ha V és E is véges halmazok.

Def: Az n-pontú út, n-pontú kör, ill. n-pontú teljes gráf jele rendre P_n, C_n ill. K_n. **Megf:** $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v fokszáma. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v ki- ill. befokát jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig k-reguláris, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, a K_n pedig $(n-1)$-reguláris.

A Handshake-lemma

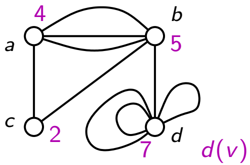
Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.



A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

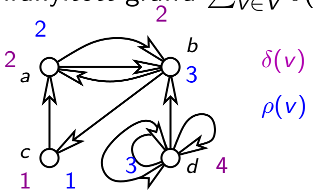
A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.



A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. $\square$

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámlálva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. $\square$
Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. 0-élű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
A KFL bizonyítása: Irányítsuk G éleit tetszőlegesen. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \rho(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \sum_{v \in V} \rho(v) = |E| + |E| = 2|E| \qquad \square$$

A Handshake-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.
A KFL bizonyítása: Irányítsuk G éleit tetszőlegesen. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \rho(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \sum_{v \in V} \rho(v) = |E| + |E| = 2|E| \qquad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszegét is.

Komplementer és izomorfia

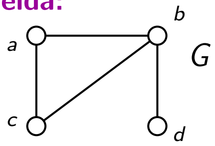
Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:

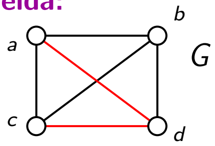


Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:

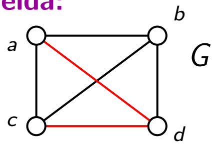


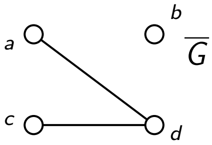
Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

Példa:





Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Biz: A K_n teljes gráf minden éle a G és $\overline{G}$ gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n-beli fokszámával, ami $n - 1$. $\square$

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

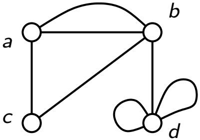
Komplementer és izomorfia

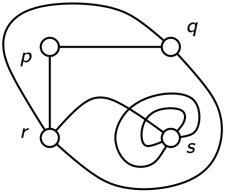
Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:





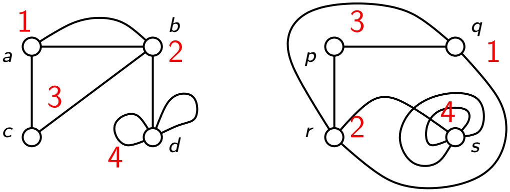
Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



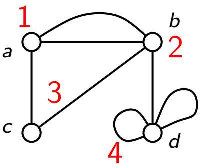
Komplementer és izomorfia

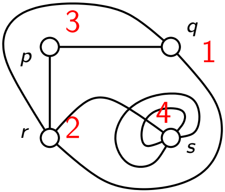
Def: A G **egyszerű** gráf komplementere $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor izomorfak, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

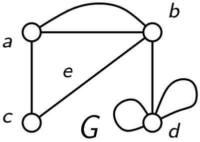
Példa:





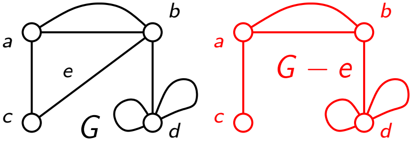
Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G-ben mint G'-ben, ugyanannyi C_{42} kör található G-ben, mint G'-ben, stb.

Gráfoperációk



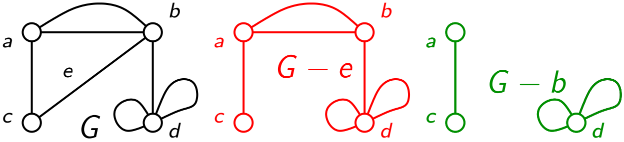
Gráfoperációk

Def: Éltörlés



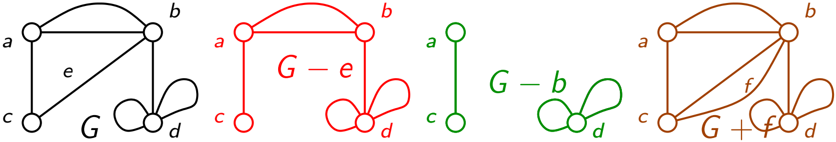
Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés



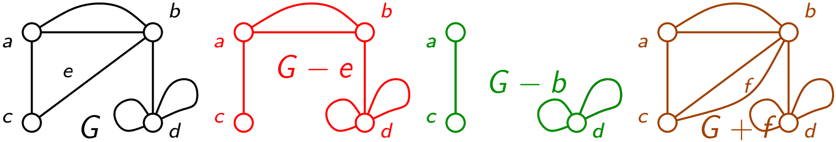
Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.



Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.

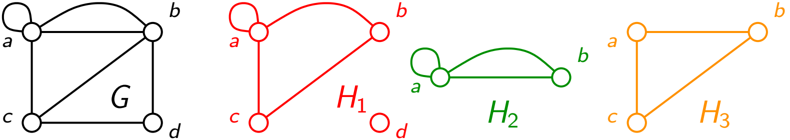


Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.

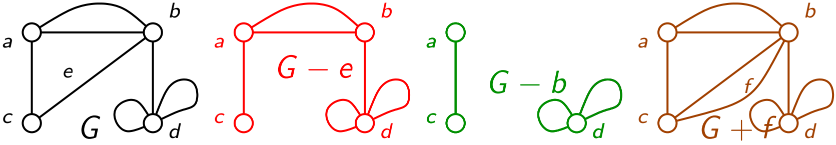
Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3: a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.



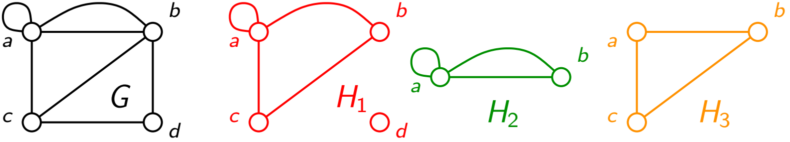
Gráfoperációk

Def: Éltörlés, csúcstörlés, élhozzáadás.



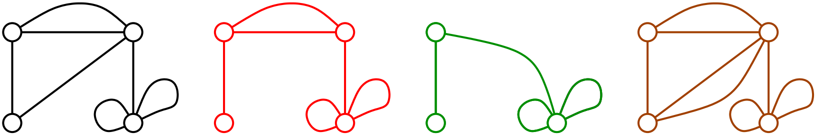
Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.
Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.
Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3: a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.



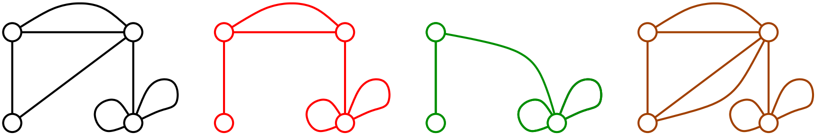
Megf: H a G részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszítő részgráfja $\iff$ $V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszített részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H csúcsai közt futó G-beli élekből áll.

Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

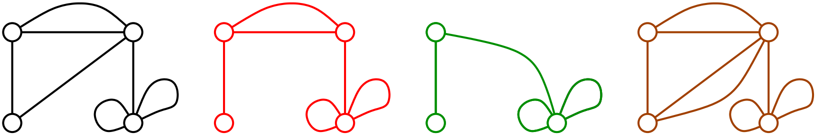
Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

Természetesen egy.

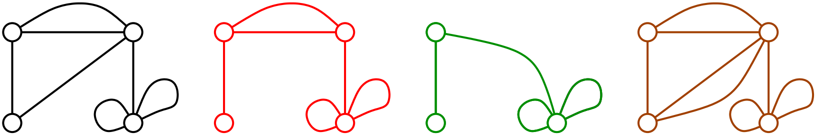
Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán? Természetesen egy.

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

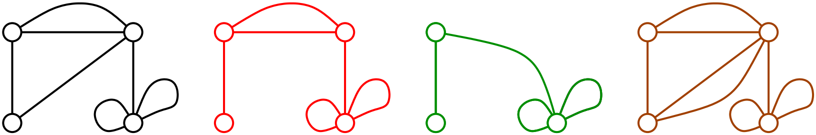
Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán? Természetesen egy.
(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

Furfangos kérdés

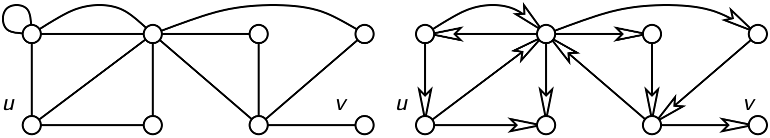


Hány gráf látható az ábrán? Természetesen egy.
(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

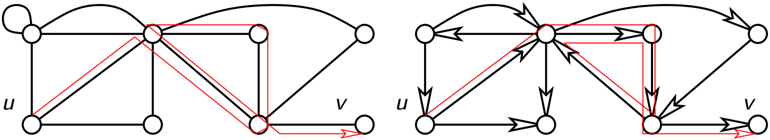
A továbbiakban a gráf csúcsainak ,,elérhetőségi struktúráját" vizsgáljuk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



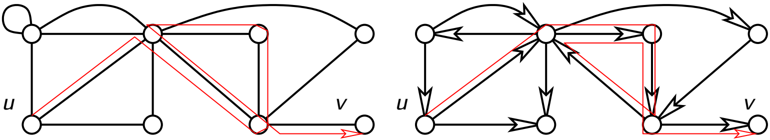
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



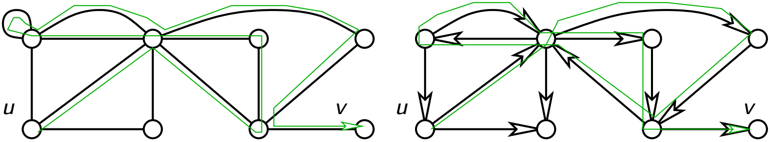
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
(Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



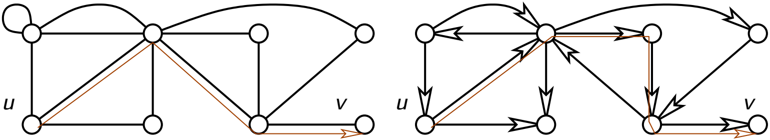
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



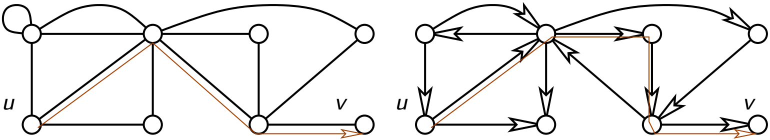
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

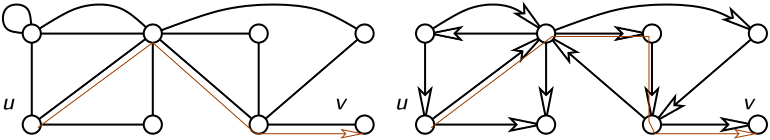
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Terminológia: Ha a kezdőpont u, a végpont v, akkor uv-élsorozatról, uv-sétáról, ill. uv-útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



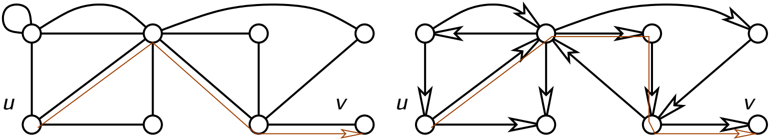
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

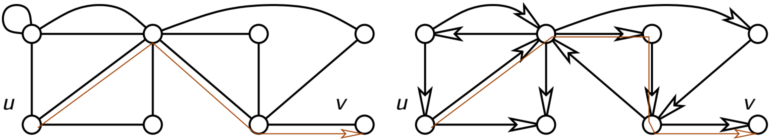
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

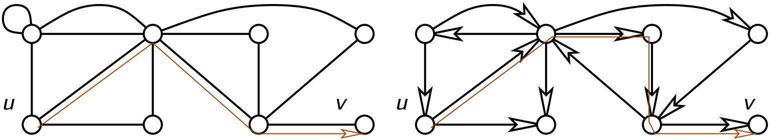
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat □

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út □

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

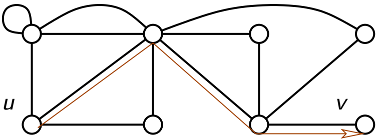
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

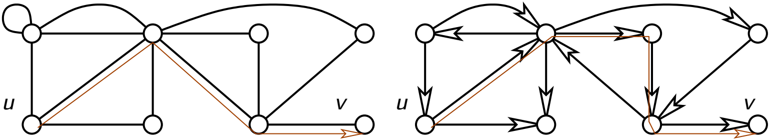
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a $\sim$ reláció segítségével történik, hanem valahogy így:
a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet út G-ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

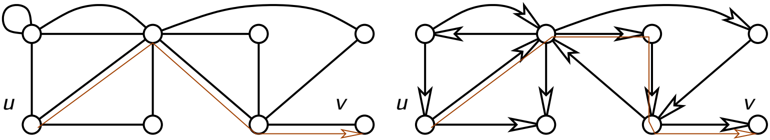
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

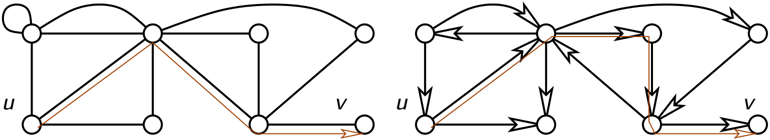
Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



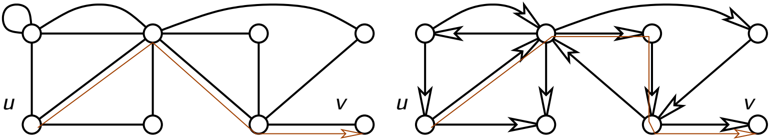
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Megj: (2) Az előző definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető: a G irányított gráfot akkor mondjuk erősen összefüggőnek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



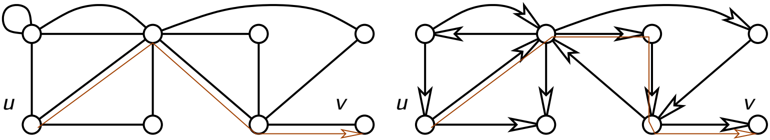
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Megj: (3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk gyengén összefüggőnek, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

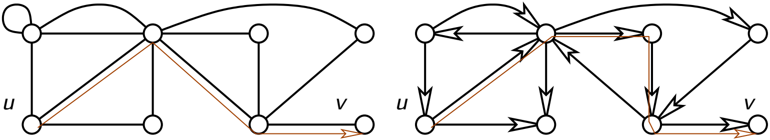
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$

Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

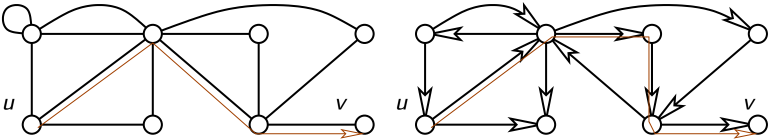
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



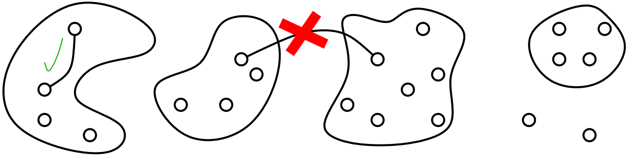
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat $\square$
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út $\square$
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:
(1) $\forall u \in V(G): \; u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G): \; u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és
(3) $\forall u, v, w \in V(G): \; u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



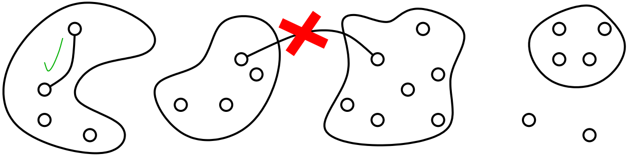
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.
Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.
Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.
Megf: G-ben $\exists uv$-út $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-séta $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-élsorozat □
Állítás: G-ben $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út □
Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.
Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció:
(1) $\forall u \in V(G)$: $u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G)$: $u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és
(3) $\forall u, v, w \in V(G)$: $u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. □
Def: A G gráf (összefüggő) komponense a $\sim$ ekvivalenciaosztálya.
Az egyelemű kompnens neve izolált pont.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

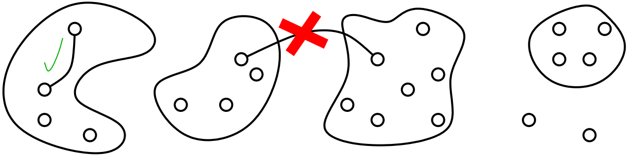
Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

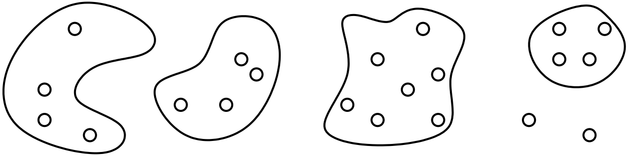


Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



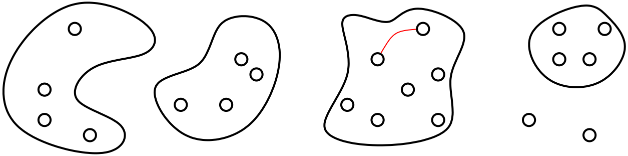
Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

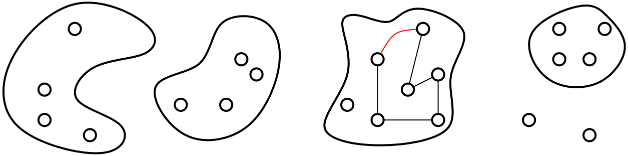
Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai ugyanabban a komponensbe esnek.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

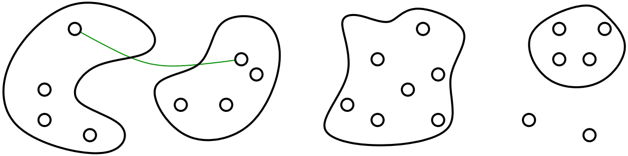
Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai ugyanabban a komponensbe esnek.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

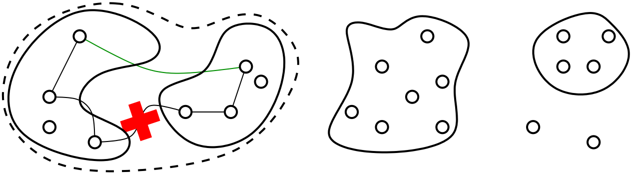
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai ugyanabban a komponensbe esnek.

II. eset: Az e él végpontjai különböző komponensben vannak.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

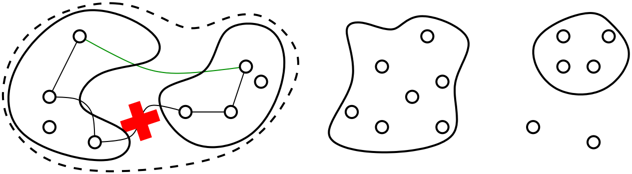
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai ugyanabban a komponensbe esnek.

II. eset: Az e él végpontjai különböző komponensben vannak.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

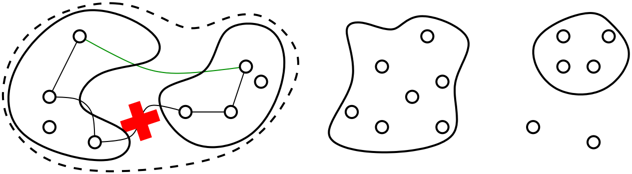


Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



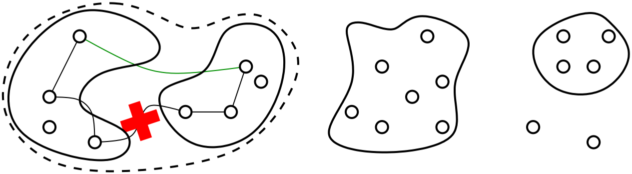
Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



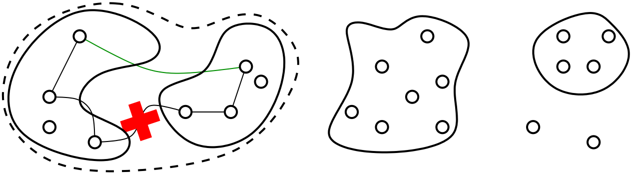
Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek. (A kör most elfajuló is lehet.)

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Lemma: (1) $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor komponense G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.
(2) Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. □

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot értjük.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. □

Élhozzáadási lemma (ÉHL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.
(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek. (A kör most elfajuló is lehet.)
(2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Fák és erdők

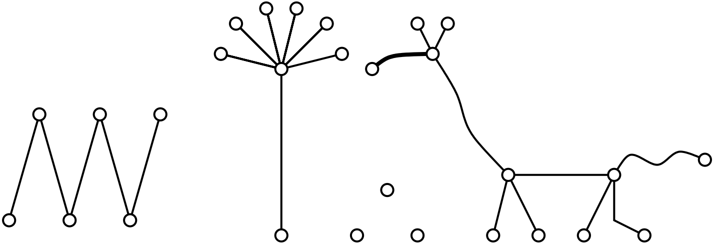
Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Példa:

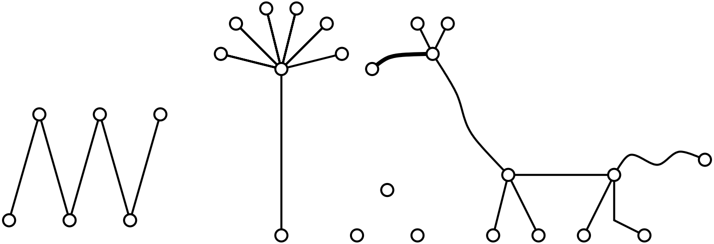


Fák és erdők

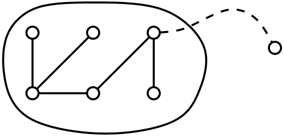
Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.

Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Példa:



Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén.
(2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:



Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Biz: Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉHL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a kompnensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n kompnense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. $\square$

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel. $\square$

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.
Biz: (a)+(b)$\Rightarrow$ (c): $\checkmark$

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow$ $|E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.
Biz: (a)+(b)$\Rightarrow$ (c): ✓
(a)+(c)$\Rightarrow$ (b): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G öf.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot erdőnek nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve fa.
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa
Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.
Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.
Biz: (a)+(b)$\Rightarrow$ (c): ✓
(a)+(c)$\Rightarrow$ (b): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉHL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G öf.
(b)+(c)$\Rightarrow$ (a): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n - 1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉHL miatt G körmentes. □

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F-e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F-e)+e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉHL miatt. Ezért F-nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F-e)$-nek. Mivel F-nek 1 komponense van, $(F-e)$-nek 2.

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.
Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v)=1$.
Biz: (2): F öf, ezért van (legalább egy) uv-útja. Tfh P és Q az F két különböző uv-útja. Található P-nek két olyan (u és v) csúcsa, amik Q-nak is csúcsai úgy, hogy a P út uv-szegmensének belső csúcsai nincsenek Q-ban. Ekkor a P és Q utak uv-szegmensei együtt egy kört alkotnak, ami ellentmondás.

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.
Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

Biz: (3): F körmentes, ezért $F + e$ minden köre tartalmazza e-t. Tfh $e = uv$. Minden kör $(F + e)$-ben meghatározza F egy uv-útját, és viszont. Ezért $F + e$ köreinek száma megegyezik F uv-útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1. □

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.
Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.
Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt
$\sum_{v \in V(G)}(d(v)-2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2.$
F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. $\square$

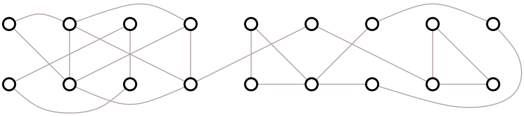
Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa levél, ha $d(v) = 1$.

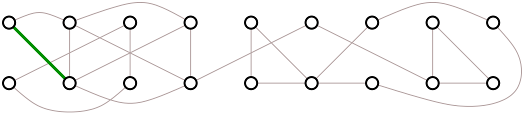
Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt
$\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2.$
F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. $\square$
(Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy másik levél, ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát elindulhatjuk egy másik él mentén, és akkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.

Feszítőfák



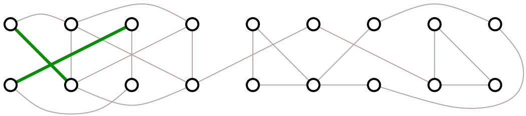
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



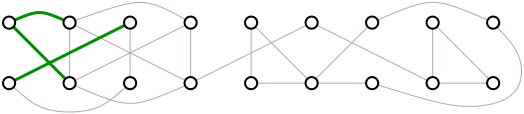
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



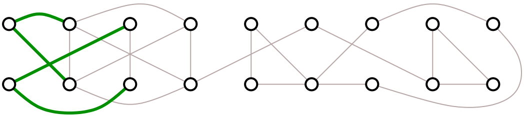
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



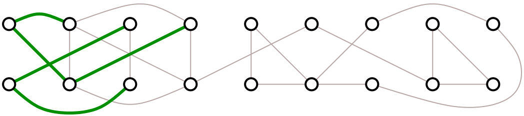
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



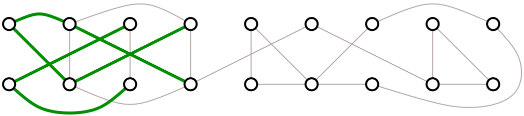
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



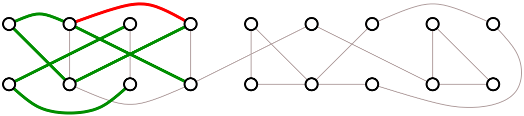
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



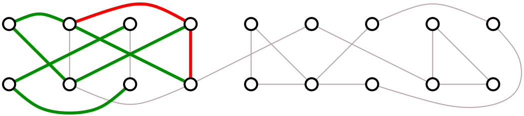
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



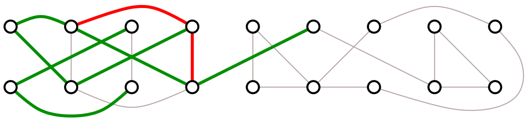
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



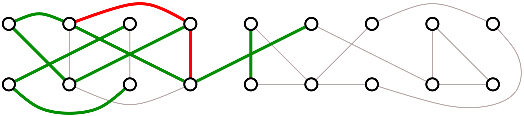
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



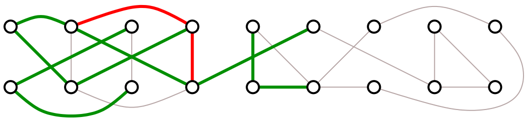
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



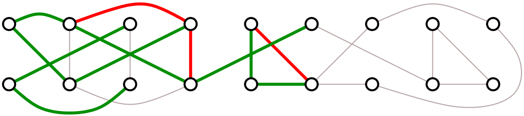
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



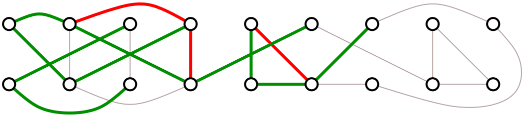
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



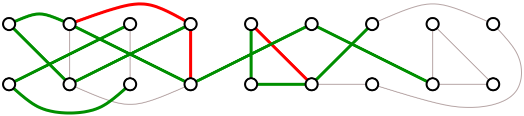
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



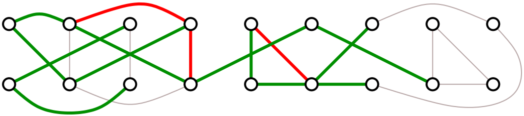
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



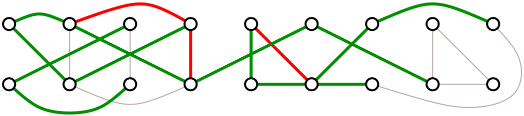
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



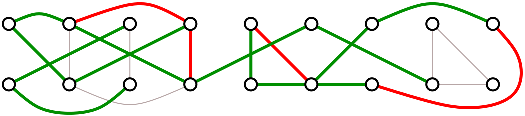
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



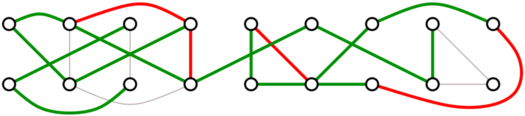
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



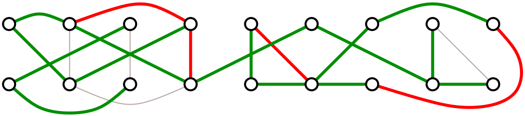
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



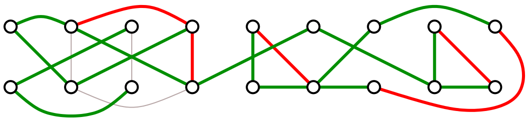
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



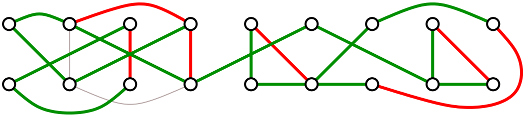
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



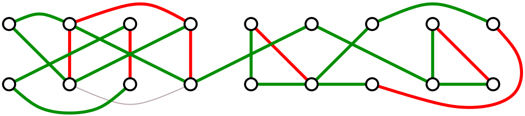
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



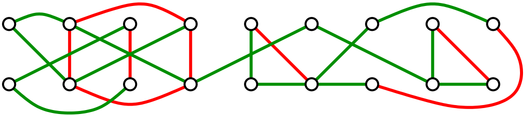
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



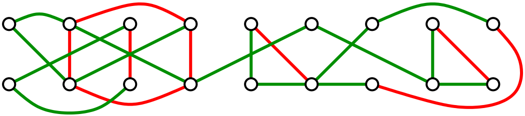
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



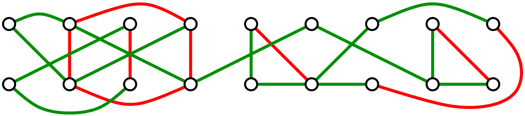
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



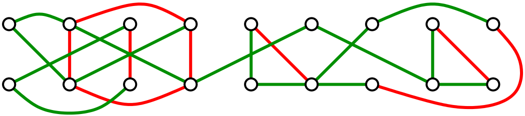
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!
Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!

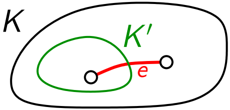
Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!
Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.

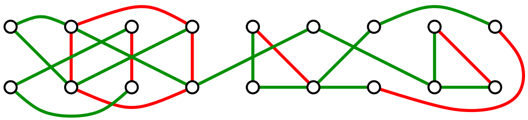
Feszítőfák

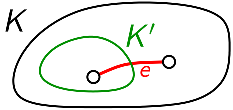




Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!
Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.
G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének.
Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G és G' komponensei megegyeznek.

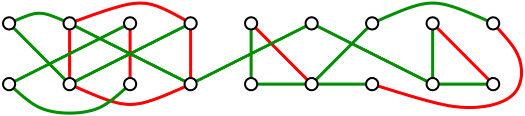
Feszítőfák

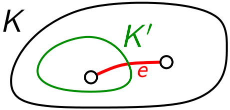




Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák

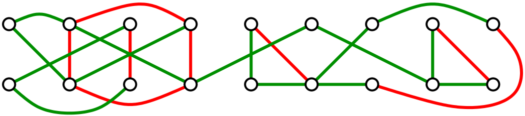


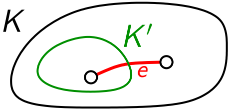


Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Feszítőfák



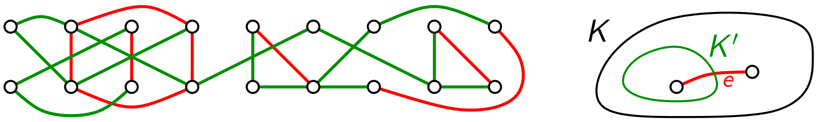


Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Feszítőfák



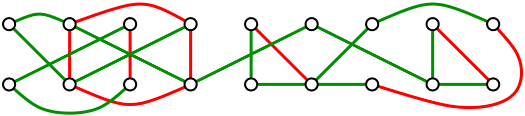
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

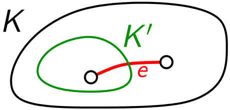
Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Feszítőfák





Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

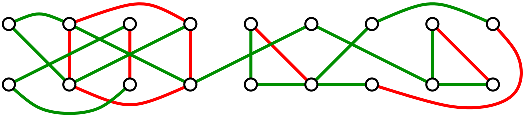
Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

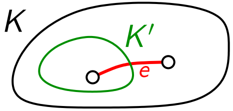
Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

Feszítőfák





Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

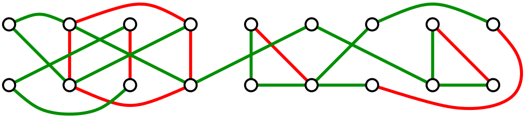
Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

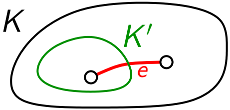
Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen kompnense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható. □

Feszítőfák





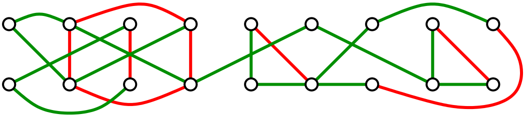
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

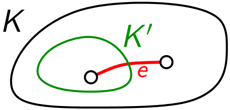
Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Feszítőfák





Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉHL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G feszítő erdeje.

Köszönöm a figyelmet!