A számítástudomány alapjai

Euler-séták és Hamilton-körök

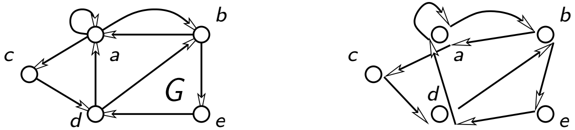
2022. október 4.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is.
(2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.
(3) Irányítatlan Euler-séta: „G egy vonallal lerajzolható".
Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.
Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.
Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor a v csúcsba pontosan annyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk onnan. A körséta G minden élét pontosan egyszer érinti: $\rho(v) = \delta(v)$. $\square$

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.
(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

Biz: Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is $1-1$ élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros. $\square$

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
 (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
 (b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
 (b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz: (a)✓. (b): Tfh G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok. □

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a Megfigyelésben látottaktól eltérő oka annak, hogy G-nek nincs Euler-(kör)sétája?

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a Megfigyelésben látottaktól eltérő oka annak, hogy G-nek nincs Euler-(kör)sétája?

Megnyugtató válasz:

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti Megfigyelés segítségével bizonyos esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a Megfigyelésben látottaktól eltérő oka annak, hogy G-nek nincs Euler-(kör)sétája?

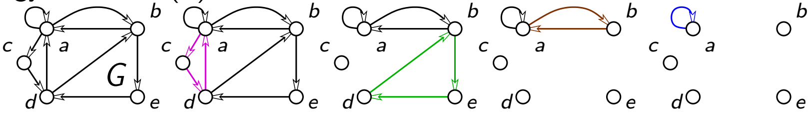
Megnyugtató válasz: Nem lehet.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.



Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_i kör éleit az i-dik színnel. $\square$

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

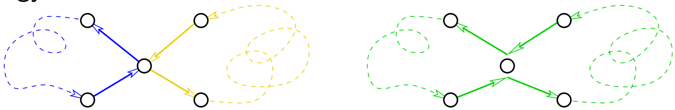
Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: A Lemma miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és e csúcs mentén ,,összevarrjuk" azokat. Mindezt addig végezzük, amíg egyetlen körséta marad. □



Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$
(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$
(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$
(G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\iff$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. $\checkmark$ $\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G ptn fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy e körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk. $\square$

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$
(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$
(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\iff$
(G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

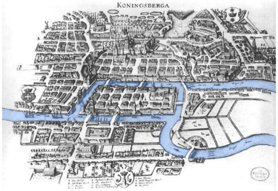
Def: Az irányított Euler-gráf olyan gráf, aminek minden $v \in V(G)$ csúcsára $\delta(v) = \rho(v)$ teljesül.
G irányítatlan Euler-gráf, ha G minden v csúcsára $d(v)$ páros.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

Történelem

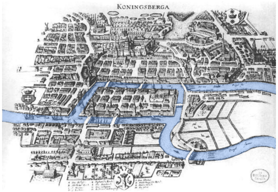
Leonard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat.

Történelem

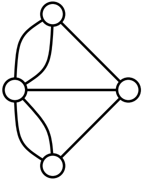
Leonard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?



Történelem



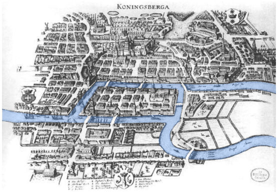
Leonard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?



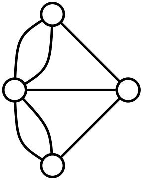
Euler megfigyelte, hogy csak a hidakon való áthaladás sorrendje számít, az nem, hogy az egyes szárazföldeken miféle útvonalat követünk. Ezért a szárazfölddarabokat ponttal, a hidakat a pontokat összekötő vonalakkal ábrázolta. Az így adódó gráfon épp egy (mai szóhasználattal) Euler-séta létezése volt a kérdés.

Történelem

Leonard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?



Euler megfigyelte, hogy csak a hidakon való áthaladás sorrendje számít, az nem, hogy az egyes szárazföldeken miféle útvonalat követünk. Ezért a szárazfölddarabokat ponttal, a hidakat a pontokat összekötő vonalakkal ábrázolta. Az így adódó gráfon épp egy (mai szóhasználattal) Euler-séta létezése volt a kérdés.



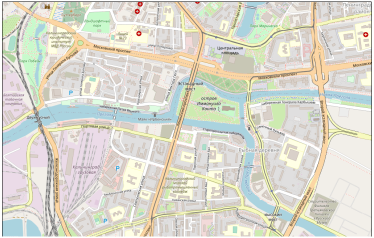
A gráf mind a 4 csúcsa páratlan fokszámú, ezért hiú ábránd a fenti tulajdonságú útvonal megtalálása.

Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korabeli hidak közül több már nem létezik.

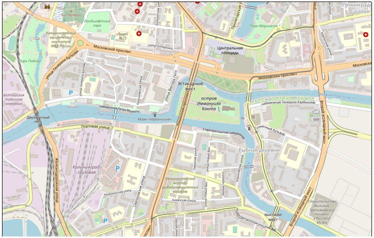
Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korabeli hidak közül több már nem létezik.



Történelem 2.

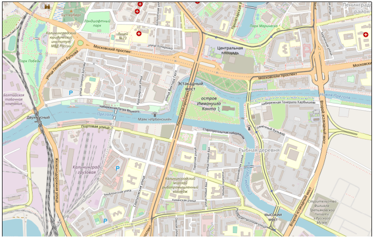
Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korableli hidak közül több már nem létezik.



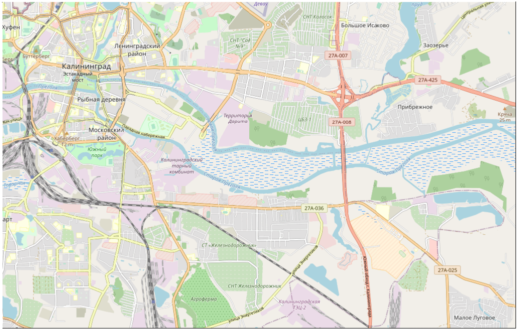
Nem véletlen, hogy a keleti szigetnek csak egy része látható a szokásos szemléltető ábrákon.

Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korableli hidak közül több már nem létezik.



Nem véletlen, hogy a keleti szigetnek csak egy része látható a szokásos szemléltető ábrákon.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.
Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja. Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén hasznosak.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: A fenti feltétel, miszerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre ill. -útja. Abból azonban, hogy G teljesíti a fenti feltételt, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre vagy útja. A szükséges feltételt úgy tudjuk alkalmazni, hogy a segítségével igazoljuk egy konkrét gráfról, hogy nincs Hamilton-köre (vagy -útja). Ha pl. azt látjuk, hogy G-ből 42 csúcsot elhagyva 43 komponens keletkezik, akkor G-nek nincs Hamilton-köre. Ha a komponensszám legalább 44, akkor G-nek Hamilton-útja sincs.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

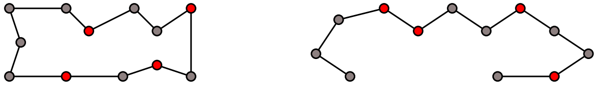
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet. $\square$



Hamilton-körök és -utak

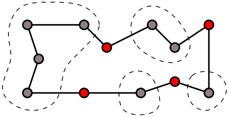
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

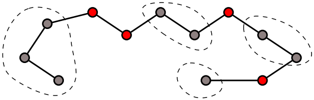
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet. □





Hamilton-körök és -utak

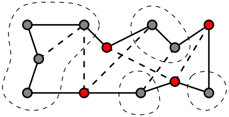
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

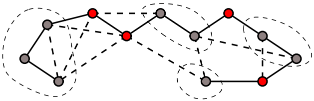
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-t tekinthetjük úgy, mint egy kör (ill. út), amihez még további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k $(k+1)$ komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz hozzá kell adni, hogy G-t kapjuk) csak csökkenteni tudják a komponensszámot, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k $(k+1)$ komponens keletkezhet. $\square$





Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

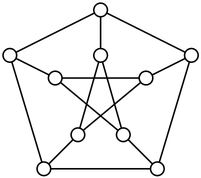
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

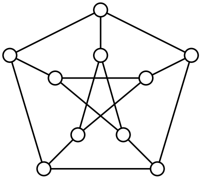
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

1: Tfh külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens keletkezik.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

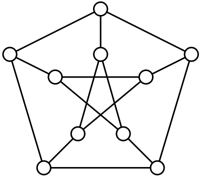
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

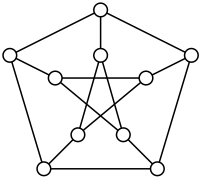
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

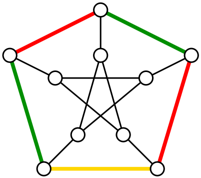
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

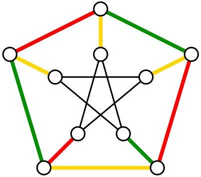
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

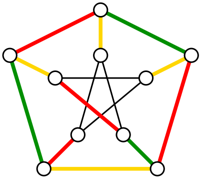
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

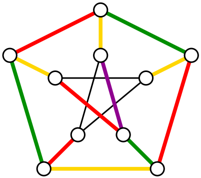
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesíti a fenti szükséges feltételt.
2. Nincs Hamilton-köre.

2: Ha lenne H-kör, akkor a H-kör éleit felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, sárga ill. zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

A továbbiakban elégséges feltételeket fogunk látni Hamilton-kör létezésére. Ezek segítségével (szerencsés esetben) gyorsan és kétséget kizáróan tudjuk bizonyítani, hogy egy adott gráfnak van Hamilton-köre. Az elégséges feltétel vizsgálata azonban nem alkalmas arra, hogy egy gráf a Hamilton-körének hiányát igazoljuk.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor $\forall U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

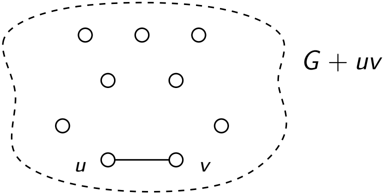
G-re igaz az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

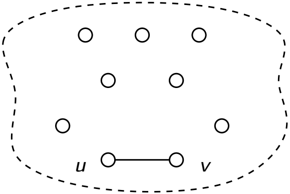
Megj: A Dirac-feltétel erősebb (többet kíván), mint az Ore. Ezért az Ore-tétel erősebb, mint a Dirac: gyengébb feltételből igazolja ugyanazt. Ezért az Ore-tétel bizonyítása a Dirac-tételt is igazolja.

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

A Chvátal-lezárt

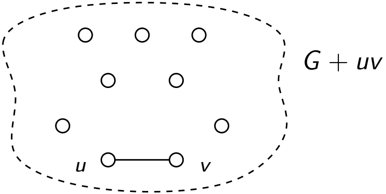


$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

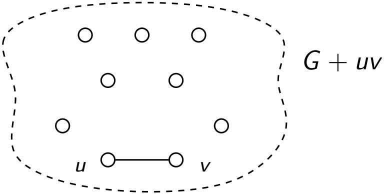
Megj: A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy a gazdag párok közé G-be ,,ingyen" behúzhatunk éleket, u.i. ez nem változtat azon a tényen, hogy van vagy nincs Hamilton-kör a vizsgált gráfban. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ Chvátal-lezártban találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-nek sincs Hamilton-köre.

A Chvátal-lezárt



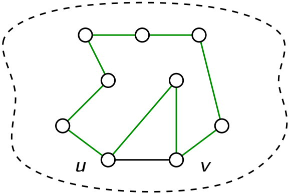
Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓

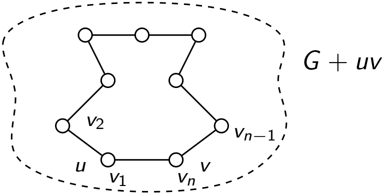
A Chvátal-lezárt



$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk.

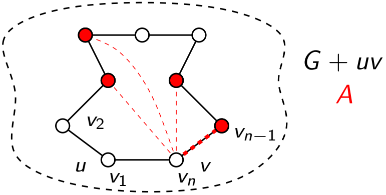
A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

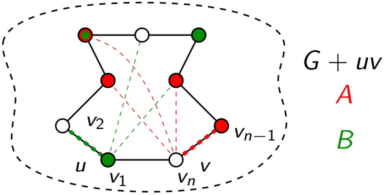
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$.

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza

A Chvátal-lezárt

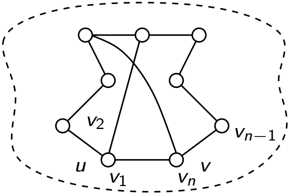


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: $\checkmark$ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$.

A Chvátal-lezárt



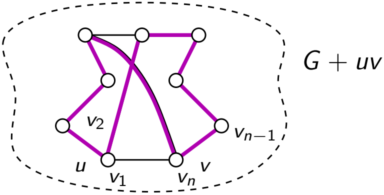
$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy H-köre. $\square$

A Chvátal-lezárt

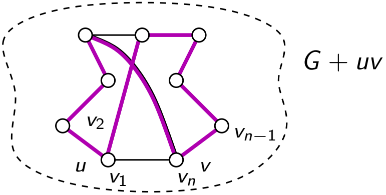


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

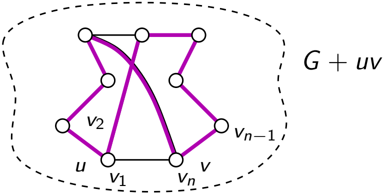
Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$, legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy H-köre. $\square$

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

A Chvátal-lezárt

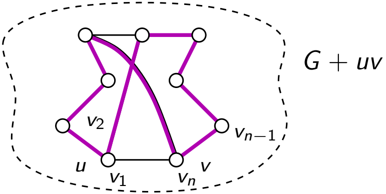


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van H-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát ,,ingyen'' összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van H-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát „ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. □

Dirac-tétel: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van H-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van H-köre. □

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A szükséges feltétel sérülésével igazolható a Hamilton-kör/út nemléte.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A szükséges feltétel sérülésével igazolható a Hamilton-kör/út nemléte.
- Az elégséges feltétel teljesülése igazolja a Hamilton-kör létezését.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A szükséges feltétel sérülésével igazolható a Hamilton-kör/út nemléte.
- Az elégséges feltétel teljesülése igazolja a Hamilton-kör létezését.
- A hízlalási lemma rendkívül hatékony eszköz a Hamilton-kör létezésének eldöntéséhez.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A szükséges feltétel sérülésével igazolható a Hamilton-kör/út nemléte.
- Az elégséges feltétel teljesülése igazolja a Hamilton-kör létezését.
- A hízlalási lemma rendkívül hatékony eszköz a Hamilton-kör létezésének eldöntéséhez.

Köszönöm a figyelmet!