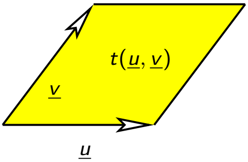
A számítástudomány alapjai

Négyzetes mátrix determinánsa

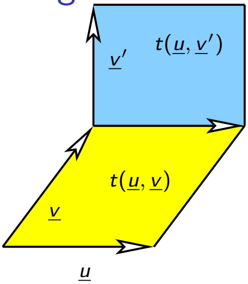
2022. november 15.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata



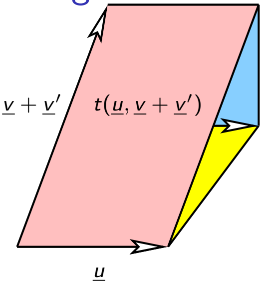
Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata



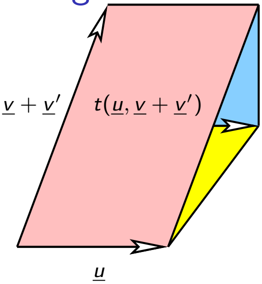
Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata



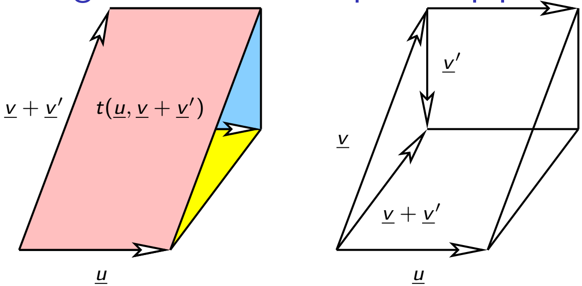
Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata



Def: Tetszőleges $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u},\underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.
Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}')=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v})=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})$.

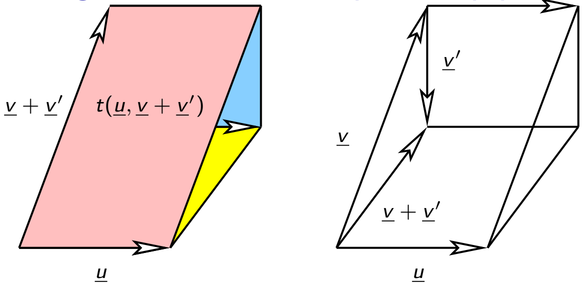
Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata



Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v})$.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

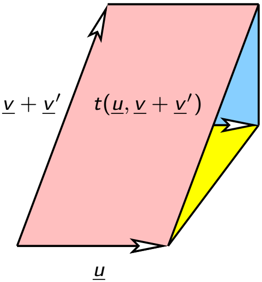


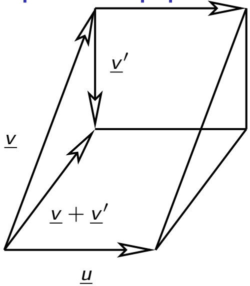
Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen.

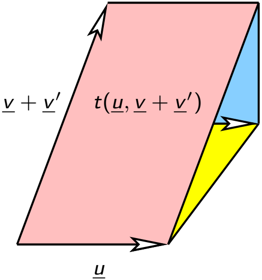
Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

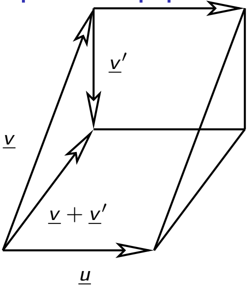




Def: Tetszőleges $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u},\underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.
Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}')=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v})=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})$.
Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u},\underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u},\underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata





Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Köv: $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát.

Megf: A térfogatfüggvény is additív és homogén:
$t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} + \underline{w}') = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}')$,
$t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}', \underline{w})$,
$t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}', \underline{v}, \underline{w})$, ill.
$t(\lambda\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \lambda\underline{w}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v}+\underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát.

Megf: A térfogatfüggvény is additív és homogén:
$t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}+\underline{w}') = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}')$,
$t(\underline{u}, \underline{v}+\underline{v}', \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}', \underline{w})$,
$t(\underline{u}+\underline{u}', \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}', \underline{v}, \underline{w})$, ill.
$t(\lambda\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \lambda\underline{w}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$.

Megj: Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkotta paralelepipedon térfogata attól függően pozitív ill. negatív, hogy az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok jobb- vagy balsodrású rendszert alkotnak.

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v})$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen. Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$.

Def: Tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát.

Megf: A térfogatfüggvény is additív és homogén:
$t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} + \underline{w}') = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}')$,
$t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}, \underline{v}', \underline{w})$,
$t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + t(\underline{u}', \underline{v}, \underline{w})$, ill.
$t(\lambda\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{u}, \underline{v}, \lambda\underline{w}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$.

Megj: Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkotta paralelepipedon térfogata attól függően pozitív ill. negatív, hogy az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok jobb- vagy balsodrású rendszert alkotnak. **Köv:** $t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = -t(\underline{w}, \underline{v}, \underline{u})$.

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \dots$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ae \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ah \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} + \ldots$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ae\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ah\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} + \ldots \quad = \ldots =$$

$$= aei\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + ahf\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bdi\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+cdh\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bfg\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + ceg\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ae\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + ah\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} + \ldots \quad = \ldots =$$

$$= aei\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + ahf\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bdi\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+cdh\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bfg\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + ceg\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Paralelotop térfogata

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok feszítette paralalepipedon térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}| = t(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogramma esetén hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) az előjel attól függ, hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend, u.i. minden csere (-1)-gyel történő szorzást jelent.

Paralelotop térfogata

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) az előjel attól függ, hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend, u.i. minden csere (-1)-gyel történő szorzást jelent.

Paralelotop térfogata

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.
Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) az előjel attól függ, hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend, u.i. minden csere (-1)-gyel történő szorzást jelent.
Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű?

Paralelotop térfogata

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.
Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) az előjel attól függ, hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend, u.i. minden csere (-1)-gyel történő szorzást jelent.
Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű? Lehetséges, hogy az egységvektorok egy sorrendjéből páros sok és páratlan sok cserével is elérhető az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend?

Paralelotop térfogata

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.
Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) az előjel attól függ, hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend, u.i. minden csere (-1)-gyel történő szorzást jelent.
Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű? Lehetséges, hogy az egységvektorok egy sorrendjéből páros sok és páratlan sok cserével is elérhető az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrend?
Megnyugtató válasz: Nem, ez nem lehetséges.
Háromféle indoklást is adunk arra, hogy miért nem.
Bármelyik alapján meghatározható az előjel tetsz. sorrend esetén.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Csoportok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Csoportok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

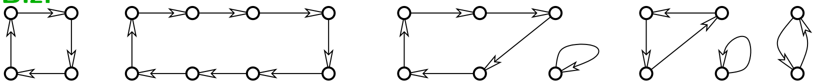
Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

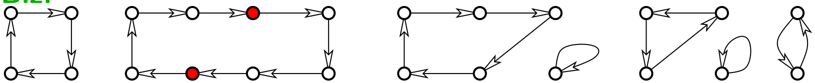
Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

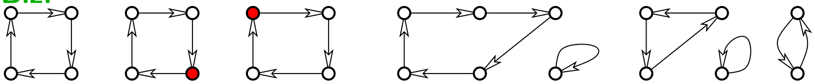
Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

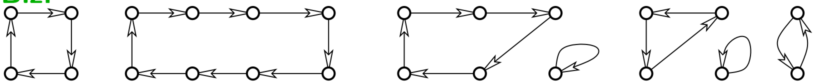
Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

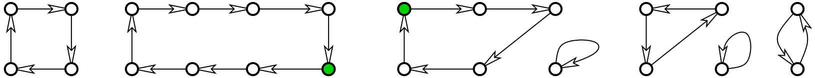
Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

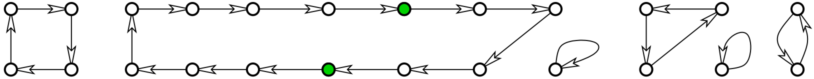
Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.

Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Biz:



Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.

Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Biz: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendnek n orbitja van, és ezekből a páros méretűek száma 0. $\square$

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Permutációk és transzpozíciók

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ tetsz. sorrendje esetén a vektorok úgy oszthatók csoportokba, hogy a csoportokon belül ciklikus helycsere történik.

Példa:

1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{e}_3$	$\underline{e}_8$	$\underline{e}_5$	$\underline{e}_7$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_6$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_4$

Orbitok: $(\underline{e}_1, \underline{e}_5, \underline{e}_3)$, $(\underline{e}_8, \underline{e}_2, \underline{e}_7, \underline{e}_4)$, $(\underline{e}_6)$

Megf: Ez a csoportokra osztás egyértelmű.

Def: A fenti csoportok a sorrendhez tartozó permutáció orbitjai.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetszőleges sorrendjén egy cserét elvégezve az orbitok száma pontosan 1-gyel változik.
Ugyanez igaz a páros méretű orbitok számára is.

Köv: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjére ekvivalensek:
(1) a sorrend ps sok cserével kapható $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$-ből,
(2) a sorrend orbitjai számának paritása megegyezik n paritásával,
(3) a sorrend páros méretű orbitjainak száma páros.
Bármelyik teljesül a fentiek közül, akkor a megfelelő hiperkocka térfogata pozitív.

Megj: Hagyományosan egy harmadik módszert használunk az előjel meghatározására.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez az alábbi σ permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Példa: Az egységvektorok $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma
$I(\sigma) = 2 + 6 + 3 + 4 + 0 + 2 + 0 + 0 = 17.$

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Biz: (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Biz:

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Biz: (2) Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k + 1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k + 1)$-szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. $\square$

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.
Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.
Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.
Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.
Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.
Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.
Köv: A σ permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele $(-1)^{I(\sigma)}$.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez tartozik egy egyértelmű σ permutáció, amelyre $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Köv: A σ permutációhoz tartozó hiperkocka térfogatának előjele $(-1)^{I(\sigma)}$. Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.

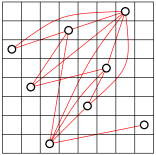
Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:

						○	
			○				
○							
					○		
	○						
				○			
							○
		○					

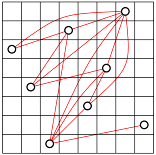
Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



Bástyaelhelyezések

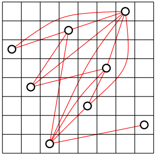
Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



$I(\sigma) = 14.$

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?
Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



$I(\sigma) = 14$. **Lássuk végre a determinánst!**

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = $
$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Példa: $\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4,2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4,2 & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.
Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástyaelhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.
Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.
Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^\top)$-ban. $\square$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

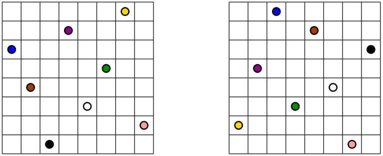
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Példa:



A determináns

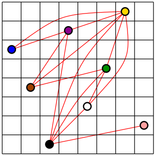
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

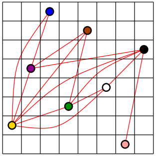
Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Példa:





A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

Megj: Egy $n\times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az i-dik oszlopbeli tényezője a $\underline{u}_i$ és $\underline{v}$ egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \; \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

Biz: A bal oldali determinánas minden kifejtési tagjából kiemelve λ-t épp a jobb oldalon szereplő determináns kifejtési tagjait kapjuk. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

Biz: Mivel $\underline{u}_i = \underline{0} = 0 \cdot \underline{u}_i$, ezért (2) miatt $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, 0 \cdot \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = 0 \cdot |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = 0$. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

Biz: Minden kifejtési tagot úgy kapunk meg, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ vektorok mindegyikének kiválasztjuk egy-egy különböző koordinátáját, és ezeket összeszorozzuk. Ezért a két determináns kifejtési tagjaiban ugyanazok a szorzatok szerepelnek. Az ugyanazon szorzathoz tartozó kifejtési tagok egy oszlopcserével kaphatók egymásból, így az előjelük ellentétes lesz. Ezért oszlopcsere hatására a determináns értéke (-1)-szeresre változik. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Biz: A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determimáns sem. (4) miatt viszont a determináns (-1)-szeres lesz: $|A| = -|A|$, vagyis $|A| = 0$. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \; \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:
(1) Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

(2) Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz: (3) Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható $|A| + |A'|$ összegként, ahol A'-nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt $|A'| = |(A')^\top| = 0$. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

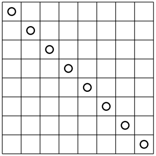
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.



A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \;\forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

?	?	?	?	?	?
0	?	?	?	?	?
0	0	?	?	?	?
0	0	0	?	?	?
0	0	0	0	?	?
0	0	0	0	0	?

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
Biz: Ha egy sor v1-e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.
Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ 0 & & \\ 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ sor- és $i-1$ oszlopcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a detereminráns.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \left| A_1, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^n \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \qquad \square$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminráns így is kiszámítható.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a deteremináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a deteremináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a deteremináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminváns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} \qquad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminláns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4+28-4-2+16 = 42$$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel

Mit tanultunk ma?

- Paralelogrammák előjeles területére vonatkozó azonosságok
- Paralelepipedon előjeles térfogatára hasonlók teljesülnek
- Magasabb dimenzióban paralelotop előjeles térfogatától hasonlót várunk el
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk (páros) orbitjai és inverziói számának változása elempár cseréjekor
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel

Köszönöm a figyelmet!