

A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

4. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf egy *bejárásán* a V -beli csúcsok alábbiak szerinti végiglátogatását értjük. Minden v csúcs állapota kezdetben *eléretlen*, majd idővel v *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz. A bejárás egy általános lépése az alábbi.

1. Ha van *elért* csúcs, választunk egyet, mondjuk u -t. **(1a)** Ha van olyan uv él, amire v *eléretlen*, akkor v *elértté* válik (az uv él mentén). **(1b)** Ha nincs ilyen uv él, akkor u *befejezetté* válik.

2. Nincs *elért* csúcs. **(2a)** Ha van *eléretlen* u csúcs, akkor u -t *elértté* tesszük. **(2b)** Ha nincs *eléretlen* csúcs se (azaz minden csúcs *befejezett*), akkor a bejárás véget ér.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy *elérési* ill. egy *befejezési sorrendje*, továbbá minden csúcs-hoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (az ún. *faélek*) alkotják a *bejárás fáját* (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf további uv éle *előreél*, ha u a bejárás fájában a v őse, *visszaél*, ha u a v leszármazottja, egyébként pedig *keresztél*. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.)

Köv.: Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint az **1.** esetben mindig a lehető legkorábban elért u csúcsot választjuk. A *szélességi fa* (avagy *BFS fa*) a szélességi bejárás fája.

Megfigyelés: (1) Szélességi bejárás során az elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel. (2) Gráfél nem ugorhat át faélt: v_1, v_2, \dots, v_n BFS elérési sorrend és $i < j < k \leq \ell$ mellett nem lehet $v_i v_\ell$ gráfél ha $v_j v_k$ faél. **Köv.:** Szélességi bejárás után nincs előreél.

Def: Tetsz. G gráf az u és v csúcsainak $dist^G(u, v)$ *távolsága* a legrövidebb G -beli uv -út élszáma.

Megfigyelés: A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G -beli távolsága r -től megegyezik az r gyökerű F szélességi fán mért távolsággal: $dist^G(r, v) = dist^F F(r, v)$.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G -beli (ir) út hossza az út eleinek összhossza, $dist_\ell(u, v)$ pedig az (ir) uv -utak közül a legrövidebb hosszát jelöli. Az ℓ hosszfv *konzervatív*, ha nincs G -ben negatív összhosszúságú (ir) kör.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $r \in V$ és egy $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ élhosszfv. Az $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (r, ℓ) -*felső becslésnek* nevezzük, ha $f(r) = 0$ és $f(v) \geq dist_\ell(r, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az $e = uv$ él *menti javítás* esetén az $f(v)$ értéket a $\min\{f(v), f(u) + \ell(uv)\}$ értékkel helyettesítjük.

Megfigyelés: (1) Ha ℓ konzervatív, akkor tetsz. (r, ℓ) -f.b. élmenti javítása (r, ℓ) -f.b.-t ad.

(2) Ha az f (r, ℓ) -felső becsléshez nincs érdemi élmenti javítás, akkor $f(v) = dist_\ell(r, v) \forall v \in V$.

Dijkstra algoritmusa Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér. Output: $dist_\ell(r, v)$ minden $v \in V$ -re. Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $f(r) = 0$ és $f(v) = \infty$ ha $v \neq r$. Az algoritmus i -dik fázisában ($i = 1, 2, \dots, |V|$) a következő történik.

- Legyen u_i az a v csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$.
- Végezzünk él menti javításokat minden U_i -ből kivezető $u_i x$ élen.

Az output a $|V|$ -dik fázis utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső $f(v)$ értékeket beállító éleket.

Megfigyelés: Ha az output az f (r, ℓ) -felső becslés, akkor (1) $f(u_i) \leq f(u_{i+1}) \forall 1 \leq i < n$ -re (2) $f(u_1) \leq f(u_2) \leq \dots \leq f(u_n)$, valamint (3) Élmenti javítás nem változtat f -n.

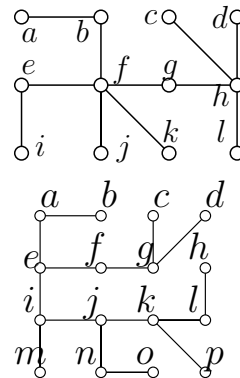
Köv.: (1) A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz $dist_\ell(r, v) = f(v) \forall v \in V$ teljesül. (2) Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G -ben: az r gyökérből minden r -ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz. (3) A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb $konst \cdot n^2$, ahol $n = |V|$.

Gyakorlatok

- Törpfallván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfallván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már

bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?

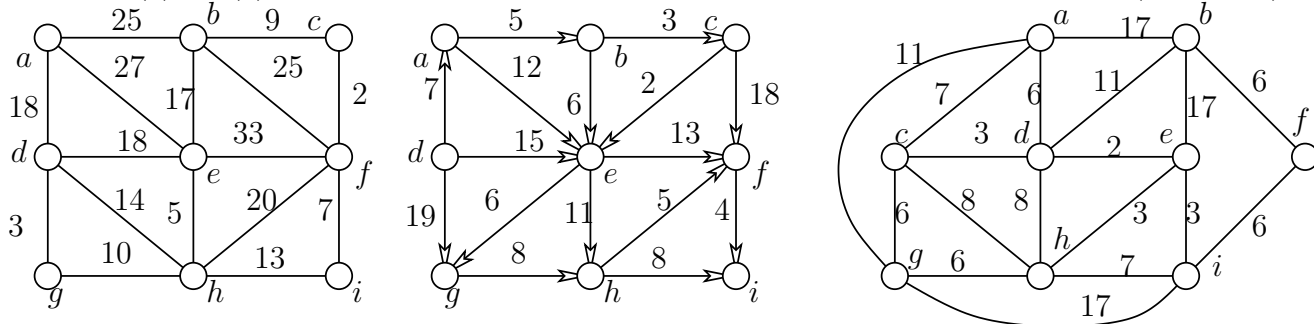
- Rajzoljunk egy összefüggő G irányítatlan gráfot, válasszuk ki egy v csúcsát gyökernek majd határozzuk meg, hogy legfeljebb hány keresztél keltkezhethet a G gráf egy v gyökerből indított BFS bejárása után. (ZH '17 alapján) (✓)
- Gyakoroljuk a BFS algoritmust irányított gráfon olyan r gyökércsúcsból indulva, ahonnan nem érhető el G minden csúcsa irányított úton. (✓)



- A felső ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G -ben? (pZH'14)
- Az alsó ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökerből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G -beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e -ből induló éleit. (pZH'15)
- Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
- Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G -ről?
- Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk Dijkstra algoritmusát. Bátran használjuk a túldoldali gráfokat. (✓)
- Legyen $G = (V, E)$ (irányított) gráf, $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény és legyenek u, v, w a G csúcsai. Igazak-e az alábbi állítások? (1) Ha P a G egy legrövidebb uv útja és w csúcsa P -nek, akkor a P út u -tól w -ig tartó ill. w -tól v -ig tartó részei a G egy legrövidebb uw - ill. wv -útját alkotják. (2) Ha P_1 és P_2 a G egy legrövidebb uw - ill. wv -útja, akkor a P_1 és P_2 egymás után fűzése a G egy legrövidebb uv -útja lesz. (✓) És ha ℓ konzervatív?
- Hogyan lehet a BFS algoritmust felhasználni adott r gyökér esetén az összes $dist_l(r, v)$ távolság meghatározására, ha az minden $l(e)$ élhossz egész szám?

Tervezzünk csavaranyákból és cukorspárgából gravitációs elven működő mechanikus számítógépet, ami alkalmas az inputként megadott, nemnegatív élhosszokkal rendelkező irányítatlan gráf tetszőleges gyökérpontjából a többi csúcs távolságának a meghatározására. (!)

- Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \dots, v_{10}\}$, és $v_i v_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a $v_i v_j$ él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14) (✓)
- A bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e -től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. (ZH '16) (✓)
- Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha P a G egy legrövidebb uv -útja az ℓ hosszfüggvényre, akkor P egyúttal legrövidebb út az ℓ' hosszfüggvényre is, ahol $\ell'(e) = \ell(e)^2$ teljesül G minden e élére? (ppZH '14)



- Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy r gyökérpont. Egyetlen Dijkstra-algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg G mindazon e éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy e hosszát eggyel csökkentjük egyetlen csúcs r -től mért távolsága sem csökken.
- Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk gyors eljárást annak a maximális λ értéknek a meghatározására, amennyivel G két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az e élt G -ből.