

A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók Leszámlálási feladat: A leszámlálendő objektumokat tartalmazó halmaz méretének meghatározása. Az objektumoknak valamiféle szigorú struktúrát kell alkotniuk.

Leszámlálási feladatok rutin megoldási módszerei:

(1) Keressünk alkalmas módszert, ami minden leszámlálendő objektumot pontosan k -szor generál. A válasz ekkor a módszer lehetséges lefutásainak k -ad része. (Sokszor már $k = 1$ is működik.)

(2) Keressünk egy a leszámlálendónál bővebb halmazt, aminek meg tudjuk állapítani a méretét. Állapítsuk meg ebből a halmazból a nem leszámlálendók számát, a válasz a két mennyiség különbsége.

Def: Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa* $n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & \text{ha } n > 0 \\ 1 & \text{ha } n = 0 \end{cases}$.

Def: Az „ n alatt a k ” *binomiális együttható* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Def: n elem k -adosztályú (ismétlés nélküli) *variációja*: n különböző elem közül k db sorba rendezése, ismétlődés nincs. Számuk $V(n, k)$. **Állítás:** $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Def: n elem k -adosztályú *ismétléses variációja*: n különböző elem közül k db sorba rendezése, ismétlődés lehetséges. Számuk $V_{ism}(n, k)$. **Állítás:** $V_{ism}(n, k) = n^k$

Def: n elem *permutációja*: n különböző elem sorbarendezése, ismétlődés nincs.

Állítás: n elem permutációinak száma $V(n, n) = n!$

Def: n elem k -adosztályú *ismétléses permutációja*: adottak a k_1, k_2, \dots, k_l pozitív egészek, melyekre $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. Az egyes elemfajtákból rendre k_1, k_2, \dots, k_l db van. Az ismétléses permutáció ezen elemek olyan sorbarendezése, amelyikben az azonos fajtájú elemek nem megkülönböztethetők.

Állítás: n elem ismétléses permutációinak száma $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_l!}$.

Def: n elem k -adosztályú (ismétlés nélküli) *kombinációja*: n különböző elem közül k db kiválasztása, ismétlődés nincs, sorrend nem számít. Számuk $C(n, k)$. **Állítás:** $C(n, k) = \binom{n}{k}$

Állítás: (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; (2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Def: n elem k -adosztályú *ismétléses kombinációja*: k elem kiválasztása n különböző fajtából, ismétlődés lehetséges, sorrend nem számít. Számuk $C_{ism}(n, k)$. **Állítás:** $C_{ism}(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{n+i-1}{i}$

Binomiális tétel: $(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0y^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}x^{n-i}y^i$.

Köv.: (1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$; (2) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots \pm \binom{n}{n} = (1 - 1)^n = 0$

Gyakorlatok

1. A rendszámreform előtt a magyar rendszámok alakja BB-SS-SS volt (B=betű, S=számjegy). Hányféle rendszámot lehetett kiadni? Mennyit nyertünk az új (ú.n. svéd típusú) BBB-SSS rendszámok bevezetésével? A holland rendszámok hajdan $XX - YY - ZZ$ alakúak voltak, ahol $\{X, Y, Z\} = \{B, S\}$. Hány rendszámot lehetett ott kiadni? (✓)
2. Hány részhalmaza van egy n -elemű halmaznak? Hányféle n hosszúságú 0/1 sorozat létezik? Mennyi az olyan 0/1 sorozatok száma, amelyek pontosan k db 1-est tartalmaznak? (✓)
3. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? (✓) Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma? (!)
4. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószeletet? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után? (✓)
5. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható? (✓)
6. Hány olyan 5-jegyű szám van, amiben szerepel a 3-as számjegy? (✓)
7. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok bástyák helyett futók esetén?(*))
8. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n számra $\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$ teljesül.
9. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?

10. Nyolc ember szeretne teniszezni három tenispályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőknek tekintjük, de ugyanazon pálya két tételét nem különböztetjük meg? (Természetesen az emberek is különbözőknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.) (ZH '99)
11. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra? (ZH '01)
12. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban k_1, k_2, \dots, k_n szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
13. Hányféleképpen ültethetünk le n^2 embert n db, egyenként n üléses sorba úgy, hogy minden egyes sorban az ott ülők életkoruk szerint balról jobbra növekvő sorrendben foglaljanak helyet? (Tegyük fel, hogy mind az n^2 szereplő életkora különböző.) (ZH '98)
14. Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre? (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapszámításokat ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.) (ZH '15)
15. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban 3–3 olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat? (ZH '11)
16. A Rátót-Piripócs focimeccs végeredménye 6 : 3 lett Rátót javára. Hányféleképpen születhetett meg ez az eredmény, azaz hányféle lehetett az egyes gólok utáni állások sorrendje? (ZH '14)
17. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk? (Az utcákat és avenuekat sorban számozzák.) (!)
18. Hányféleképpen lehet kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót az itt látható táblázatban, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

19. Hányféleképpen lehet sorba rakni az $1, 2, \dots, 10$ számokat úgy, hogy a sorozat valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.) (ZH '14)
20. Három tranzitóna mindegyikéből 100 migránst kell két menekülttáborba elszállítani úgy, hogy az első táborba pontosan 100, míg a másodikba éppen 200 menedékkérő érkezen. Hányféleképp lehet szétosztani a szükséges 300 fős szállítási kapacitást a hatféle lehetséges útvonal között?
21. Egy adott $n \times k$ méretű csokoládéból hányféleképpen lehet kisebb csokoládét készíteni? (A csokoládét csak perforáció mentén törhetjük, és pl. nem olvashatjuk be.)
22. Hány részre osztja n általános helyzetű, azonos síkban fekvő egyenes a síkot? (A sík egyenesei akkor általános helyzetűek, ha nincs köztük két párhuzamos és semelyik három egyenesnek nincs közös pontja.) A keletkező síkrészek közül hány lesz korlátos?
23. Hat általános helyzetű egyenes alkotta 15 metszéspontból hányféleképpen lehet kiválasztani 6-ot úgy, hogy egyetlen egyesről se válasszunk kettőnél több metszéspontot? (*)
24. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Hány lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessek? Hány lakat kell akkor, ha azt akarják, hogy a banditavezér bármely más rablóval kinyithassa a ládát (de egyedül ne), amúgy pedig a fenti szabály érvényesüljön? (*)
25. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphat helyet a testületben? (*)