A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2016. 10. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hány különböző módon lehet a METAMATEMATIKA szó betűit egy kör mentén úgy elrendezni, hogy mind a 14 betűt pontosan egyszer fel használjuk fel? Két felírást akkor tekintünk azonosnak, ha egyik a másikból egy forgatással megkapható. (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   Mivel a vizsgált szóban pontosan egy I betű szerepel, ezért minden leszámlálandó elrendezés meghatározza a maradék betűk egy ismétléses permutációját, mégpedig úgy, hogy az óramutató járásával egyezően végighaladva olvassuk ki az I-től indulva a betűket. (2 pont)
   Hasonlóan, a maradék betűk tetszőleges ismétléses permutációjához tartozik egy leszámlálandó felírás, mégpedig az, amikoris az I után az adott permutáció szerint következnek a betűk az óramutató járása szerint körbehaladva. (2 pont)
   Ezért a leszámlálandó elrendezések száma megegyezik a 13 maradék betű ismétleses permutációinak számaval. (2 pont)
   Mivel 3 db M, 2db E, 3db T, 4db A és 1 db K betűt kell sorbaraknunk (1 pont)
   az órán tanultak szerint az ismétléses permutációk száma $\frac{13!}{3!^2 \cdot 2! \cdot 4!}$ lesz. (3 pont)

2. A G gráfnak $n+3$ csúcsa van: ebből 3 piros (a, b, c) és n zöld $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban?

   A G gráf minden 6 pontú köre olyan, hogy abban a három piros pont mellett három tetszőleges zöld pont szerepel. (2 pont)
   A három zöld pont $\binom{n}{3}$-féleképp választható. (1 pont)
   Azt kell még megszámolnunk, hogy ha rögzítünk három zöld pontot, akkor hány különböző olyan 6 pontú kör van, amelyik a három piros pont mellett éppen ezt a három zöldet használja. (1 pont)
   Járjuk végig a kört úgy, hogy az a pontból indulunk, és a következőnek érintett piros pont a b lesz. Ez a körüljárás meghatározza a zöld pontok egy permutációjat. (2 pont)
   Másfelől, a három kiválasztott zöld pont tetszőleges permutációja egyértelműen meghatároz egy olyan 6 pontú kört G-ben, amelyben a-ból b felé indulva ilyen sorrendben látjuk a zöld pontokat. (1 pont)
   Ezek szerint minden kiválasztott zöld ponthármashoz tartozó 6 hosszú körök száma pontosan 3!, (2 pont)
   így a kérdésre a válasz $\binom{n}{3} \cdot 3!$. (1 pont)

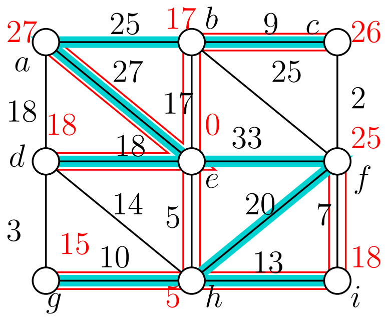
3. Legyen G a bal oldali ábrán látható gráf, az élekre írt számok az adott él szélességét jelentik. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely G bármely két csúcsa között tartalmazza G egy legszélesebb útját? Ha van ilyen fa, akkor adjunk meg egyet.

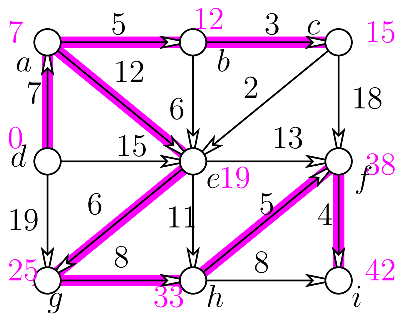
   Az órán azt tanították, hogy nemnegatív élszélességekkel megadott, összefüggő, irányítatlan gráfnak mindig létezik olyan feszítőfája, amely bármely két csúcs között e gráf egy legszélesebb útját tartalmazza. (2 pont)
   Ezért az első kérdésre igenlő a válasz. (1 pont)
   Azt is tanították, hogy ilyen feszítőfát a Kruskal algoritmusnak azzal a módosításával lehet megkonstruálni, amelyikben a szélesség csökkenő sorrendjében döntünk az egyes élek bevételéről (aszerint, hogy körmentes-e az eddig bevett élekkel.) (3 pont)
   Miután lefuttattuk a Kruskal algoritmus ezen változatát, a vastaggal jelölt élek alkotta feszítőfát kapjuk (kaphattunk volna másikat is), és ez a fa a válasz a második kérdésre. (4 pont)

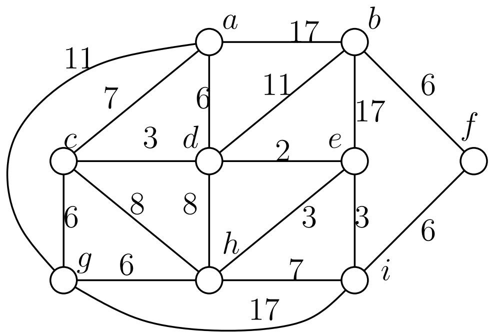
4. Ismét a bal oldali ábrán látható gráfot vizsgáljuk. Most az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e-től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat.

   Nemnegatív élhosszokkal megadott gráf egy csúcsából kell megtalálni minden más csúcsba egy legrövidebb utat. Az órán tanult Dijkstra algoritmus alkalmas erre. Ha az algoritmus végrehajtása során minden csúcshoz megjelölünk egy olyan élt, amely az adott csúcs gyökértől való távolságát beállította, akkor a megjelölt élek alkotta feszítőfa rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a gyökérből annak mentén minden más csúcsba egy legrövidebb úton lehet eljutni. (3 pont)
   Az gráf csúcsait a Dijkstra algoritmusban $e, h, g, b, d, i, f, c, a$ sorrendben vesszük be a KÉSZ halmazba, és a távolságokra az ábrán a megfelelő csúcs mellett szereplő számokat kapjuk. (4 pont)
   A dupla vonallal jelölt élek alkotta feszítőfa adódik legrövidebb utak fájának, ennek mentén találunk e-ből minden más csúcsba egy legrövidebb utat. (3 pont)

   Van egyébként ettől különböző legrövidebb utak fája is, ami szintén helyes. Ilyet kaphatunk ha a hf, bc ill. ed élek bármelyikét rendre az if, fc ill. gd éllel helyettesítjük.





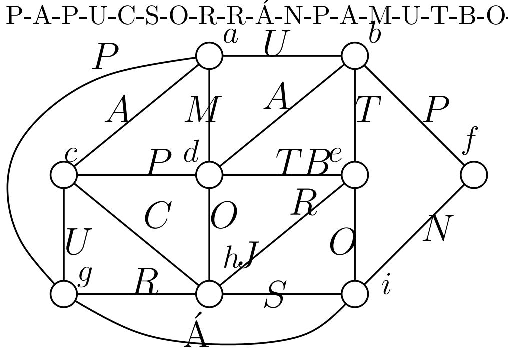


5. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható.

Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $d, a, b, c, e, g, h, f, i$ sorrendet. (2 pont)
Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) (4 pont)
Meg kell még határoznunk a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a projekt még a lehető legrövidebb időn belül befejezhető. Vegyük észre, hogy a c tevékenység kezdése közvetlenül csak azokra a tevékenységekre hat, amelyekbe c-ből él fut, konkrétan az e és f tevékenységekre. Azonban e és f mindegyike rajta van a $daeghfi$ kritikus úton, így ezeknek a tevékenységeknek muszáj az imént kiszámított kezdési időben elkezdődniük. A c tevékenység legkésőbbi kezdési ideje tehát az a legnagyobb érték, ami még nem veszélyezteti e és f időbeni kezdését. A ce él miatt c nem kezdődhet 17-nél, a cf él miatt pedig 20-nál később. (3 pont)
A válasz tehát a 17 kezdési idő a c tevékenységre. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat!

Vizsgáljuk egy optimális megoldást! Órarugógerincű barátunk útja a megadott gráf egy olyan zárt élsorozatának felel meg, ami minden élt legalább egyszer tartalmaz. Készítsük el azt a gráfot, amelyet az ábrabeliből úgy kapunk, hogy minden élt annyi párhuzamos példányban húzunk be, ahányszor OF végigrepült az adott útszakaszon. Az így kapott G' gráfon OF útja egy Euler-körséta lesz. (3 pont)
A feladatunk tehát az, hogy a lehető legkisebb összhosszúságú párhuzamos élek behúzásával elérjük, hogy a kapott G' gráfnak legyen Euler-körsétája. (1 pont)
Mivel az eredeti G gráf összefüggő, ezért az Euler-körséta létezésére vonatkozó, órán tanult tétel szerint csupán azt kell elérni, hogy minden fokszám páros legyen a párhuzamos élek behúzása után. Világos, hogy egyetlen élnek sem érdemes két párhuzamos példányát behúzni az eredeti mellé, hiszen ekkor kettővel kevesebb párhuzamos példányt behúzva egyrészt párosak maradnának a fokszámok, másrészt a párhuzamosan behúzott élek összhossza csökkenne. Márpedig egy fenyegető menyétinvázió árnyékában egyetlen hazafi sem vállalhat felesleges sétarepülést. (2 pont)
Az ábrán megadott gráfnak pontosan két páratlan fokú pontja van: d és h. A megpárhuzamozott élek tehát egy d és h közötti utat jelölnek ki G-ben, a mi célunk pedig ezen út összhosszának minimalizálása. (2 pont)
Egy legrövidebb dh utat kell tehát keresnünk. Ez a tanult algoritmusok nélkül is megy, hiszen a deh út hossza 5, és ennél rövidebb élen csak c-be juthatunk d-ből, ahonnan nem lehet 5-nél rövidebb élen folytatni az utat. (1 pont)
OF optimális útvonala tehát olyan lesz, ami minden élt pontosan egyszer jár be, kivéve a kétszer bejárt de és dh éleket. A feladat szerint meg is kell tervezni egy ilyen útvonalat. Erre egy lehetőség egy tetszőleges Euler-séta d-ből h-ba, majd a he ill ed élek bejárása. (1 pont)
Szegény Felpattanó! Rajta tán még ez sem segít. Nosza, itt egy itiner, hogy még Mutyipusztán is értsék:
P-A-P-U-C-S-O-R-R-Á-N-P-A-M-U-T-B-O-J-T (ld ábra). (0 pont)



Egy szöveges példa néha nem tud minden részletre kitérni, így arra sem, hogy az épületek fölött repülési tilalom van érvényben, különösen a veszélyes lúgot szállító járművekre. Így hősünknek az útvonalat értelemszerűen a gráfélek mentén kell terveznie. Mivel ez a kikötés nem szerepelt a feladat kitűzésében, az a jogászkodó hallgató, aki erre rámutat, ezért 1 pontot érdemel. A további pontozás a fenti leírás szerinti, azzal, hogy 10 pontnál több nem szerezhető.