

A 2025. évi Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-verseny feladatai

2025. április 30.

1. Az $n \times n$ méretű, valós elemű négyzetes A mátrix *ciklikus permutációja* azt jelenti, hogy A minden eleme eggyel jobbra, a sor végén álló elem a következő sor elejére, a jobb alsó sarokban álló elem pedig a bal felső sarokba kerül. Jelölje $f(A)$ az A mátrixból ciklikus permutációk egymásutánjával kapható n^2 db mátrix determinánsainak összegét. Adjunk meg egy olyan 42×42 méretű A mátrixot, aminek az elemei pontosan az 1 és 42^2 közti egész számok és amire $f(A)$ maximális az ilyen tulajdonságú mátrixok között.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha u és v egy véges, egyszerű, irányítatlan, összefüggő G gráf nemszomszédos csúcsai, akkor G -nek van olyan r csúcsa és r -gyökerű F BFS-fája, amire F a $G + uv$ gráfnak is r -gyökerű BFS-fája.
3. Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ és tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf minden csúcsát generálják a szomszédai, azaz $\underline{v} \in \langle N(\underline{v}) \rangle$ teljesül minden $\underline{v} \in V$ csúcsra, ahol $N(\underline{v})$ a $\underline{v}$ csúcs G -beli szomszédainak halmazát jelöli. Bizonyítsuk be, hogy ha G csúcsai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy azonos színre színezett csúcsok között nem fut él, akkor $\dim(V) \leq \frac{3}{4}|V|$.
4. Tegyük fel, hogy az n csúcsú, összefüggő G gráf éleit úgy színeztük ki néhány színnel, hogy G minden körének legyen két azonos színű éle. Határozzuk meg a színezéshez felhasznált színek maximális számát.

Tudnivalók a hátoldalon

Versenyfeltételek és tudnivalók

A Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-versenyen a BME VIK BSc és MSc és a BME TTK BSc tanulmányokat folytató hallgatói vehetnek részt.

A feladatok kidolgozására 150 perc fordítható. Ezalatt tilos a versenyzők együttműködése, és a résztvevők nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt. Minden versenyző helyesen és jól olvashatóan tüntesse fel a nevét és neptun kódját a beadott dolgozat minden lapjának első oldalán, lehetőleg a jobb felső sarokban. Kérjük a versenyzőket, hogy minden beadott lapon csak egy feladattal foglalkozzanak és egyértelmű áthúzással jelezzék dolgozatukban a hibásnak ítélt részeket. A versenydolgozat beadása nem kötelező. Kérjük továbbá, hogy mindazon versenyzők, akik még nem regisztráltak, tegyék ezt meg a verseny után mihamarabb a www.cs.bme.hu/konig linkről nyíló űrlapon. A kijavított dolgozatokba betekintést biztosítunk a fenti linken később meghirdetett időpontban.

A dékáni hivatal a verseny minden helyezettjét a versenyen kitöltött jelenléti íven megadott e-mail címén keresztül hívja meg a díjkiosztó ünnepségre.

Jó munkát kíván

a versenybizottság