

A 2023. évi Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-verseny feladatai

1. A valós elemű A négyzetes mátrixszal az alábbi lépéseket végezhetjük: sorcsere, sor nemnulla skalárral végigszorítása, sor másik sorhoz hozzáadása, valamint ciklikus permutáció, amiben a mátrix minden eleme eggyel jobbra kerül, a sor végén álló elem a következő sor elejére, a jobb alsó sarokban álló elem pedig a bal felső sarokba. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépésekkel elérhető, hogy a kapott mátrix minden eleme 0 vagy 1 legyen, és 1-esek kizárólag az első sorban álljanak.
2. Tegyük fel, hogy az F fa minden e éléhez adott egy nemnegatív $\ell(e)$ élhossz. Az F csúcsaiból úgy kell párokat képeznünk, hogy F minden csúcsa legfeljebb egy párban szerepeljen. Adjunk gyors eljárást olyan párrendszer megtalálására, amiben az összepárosított csúcsokat összekötő utak összhossza a lehető legnagyobb. Hogyan lehet egy nemnegatív ℓ' hosszfüggvényhez maximális összhosszt megvalósító párrendszert találni egy, az ℓ hosszfüggvény szerinti optimális párrendszer ismeretében?
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 10-csúcsú, összefüggő, egyszerű G gráf fokszámai $1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4$, akkor G -nek van olyan feszítőfája, aminek legfeljebb 4 levele van.
4. Jancsin és Juliskán kívül további három fiú és három lány jár a savköpő menyét csoportba. A húsvéti nyuszi Jancsinak és Juliskának fejenként 42 tojást tojt, a többi csoporttárs mindegyikének fejenként 41-et. Az a szabály az óvodában, hogy ha egy gyerek elfogyaszt egy tojást, akkor minden ellentétes nemű csoporttársának át kell adnia egy-egy tojást a sajátjaiból. A gyerekek addig habzsolták a tojásokat a fenti szabály megtartásával, míg már senki sem ehet a szabályt betartva újabb tojást. Hány tojása van Jancsinak? (Jancsi fiú, Juliska lány.)
5. Kiszínezhetők-e a $K_{n,n-1}$ teljes páros gráf csúcsai és élei $n + 1$ színnel úgy, hogy se közös csúccsal rendelkező élek, se szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek, továbbá egyetlen él színe se egyezzen meg semelyik végpontjának a színével?

Tudnivalók a hátoldalon

Versenyfeltételek és tudnivalók

A Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-versenyen a BME VIK BSc és MSc és a BME TTK BSc tanulmányokat folytató hallgatói vehetnek részt.

A feladatok kidolgozására 150 perc fordítható. Ezalatt tilos a versenyzők együttműködése, és a résztvevők nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt. Minden versenyző helyesen és jól olvashatóan tüntesse fel a nevét és neptun kódját a beadott dolgozat minden lapjának első oldalán, lehetőleg a jobb felső sarokban. Kérjük a versenyzőket, hogy egyértelmű áthúzással jelezzék dolgozatukban a hibásnak ítélt részeket. A versenydolgozat beadása nem kötelező. Kérjük továbbá, hogy mindazon versenyzők, akik még nem regisztráltak, ezt tegyék meg a verseny után mihamarabb a www.cs.bme.hu/konig linkről nyíló űrlapon. A kijavított dolgozatokba betekintést biztosítunk a fenti linken később meghirdetett időpontban.

A verseny díjazottjait a Kari Tanulmányi Verseny pályázati adatlapon megadott e-mail címen értesíti a dékáni hivatal. A versenyen történő részvételnek nem, ám a versenyző esetleges díjazásának feltétele ez utóbbi adatlap beküldése a <https://vik.hk/verseny> oldalon leírtak szerint.

Jó munkát kíván

a versenybizottság