

A 2022. évi Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-verseny feladatai

1. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és élein egy $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Egy lépésben megépíthetjük G egy tetszőleges élét, ám ennek hatására minden meg nem épített él költsége megduplázódik. Tervezzünk hatékony algoritmust, ami a lehető legolcsóbban építi meg G egy feszítőfáját.
2. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban a maximális st -folyam nagysága 24. Ha az u_1v_1 és az u_2v_2 élek mindegyikének a kapacitását 32-vel megnöveljük, akkor a maximális st -folyam nagysága 88-ra változik. Meghatározható-e mindezek alapján, hogy mennyi lesz a maximális st -folyam nagysága akkor, ha az eredeti hálózatban az u_1v_2 él kapacitását 13-mal csökkentjük, az u_2v_1 él kapacitását pedig 31-gyel növeljük? Ha igen, akkor mennyi ez a maximum? (Az u_1v_2 él kapacitása az eredeti hálózatban legalább 13 volt.)
3. Kiszínezhető-e a $K_{100,100}$ teljes páros gráf minden csúcsa és minden éle 101 szín valamelyikére úgy, hogy se azonos színű csúcsok között ne vezessen él, se azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja, továbbá egyetlen él színe se egyezzen meg egyik végpontjának színével sem?
4. Igaz-e, hogy a G gráfnak bizonyosan van Hamilton-útja, ha G egyszerű, 10-csúcsú, és csúcsainak fokszámai 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6?
5. Legyenek a G gráf csúcsai az $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ egész számpárok, és az (a, b) csúcs szomszédai legyenek az $(a - 1, b)$, $(a + 1, b)$, $(a, b - 1)$, $(a, b + 1)$ csúcsok. Tetszőleges $H(1) \subset V(G)$ véges halmaz és $i = 1, 2, \dots$ index esetén legyen $H(i + 1) = H(i) \cup f(H(i))$, ahol $f(H(i))$ a G azon csúcsaiból áll, amelyeknek legalább két $H(i)$ -beli szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy $|H(n)| \leq 4|H(1)|^2$ teljesül minden pozitív egész n számra. Igaz-e, hogy $|H(n)| \leq |H(1)|^2$ is mindig teljesül?

Tudnivalók a hátoldalon

Versenyfeltételek és tudnivalók

A Kőnig Dénes Diszkrétmatematika-versenyen a BME VIK BSc és MSc és a BME TTK BSc tanulmányokat folytató hallgatói vehetnek részt.

A feladatok kidolgozására 150 perc fordítható. Ezalatt tilos a versenyzők együttműködése, és a résztvevők nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt. Minden versenyző helyesen és jól olvashatóan tüntesse fel a nevét és neptun kódját a beadott dolgozat minden lapjának első oldalán, lehetőleg a jobb felső sarokban. Kérjük a versenyzőket, hogy egyértelmű áthúzással jelezzék dolgozatukban a hibásnak ítélt részeket. A versenydolgozat beadása nem kötelező. Kérjük továbbá, hogy mindazon versenyzők, akik még nem regisztráltak, ezt tegyék meg a verseny után mihamarabb a www.cs.bme.hu/konig linkről nyíló űrlapon. A kijavított dolgozatokba betekintést biztosítunk a fenti linken később meghirdetett időpontban.

A verseny díjazottjait a Kari Tanulmányi Verseny pályázati adatlapon megadott e-mail címen értesíti a dékáni hivatal. A versenyen történő részvételnek nem, ám a versenyző esetleges díjazásnak feltétele ez utóbbi adatlap beküldése a <https://vik.hk/verseny> oldalon leírtak szerint.

Jó munkát kíván

a versenybizottság