Kombinatorika és gráfelmélet II.

2. ZH javítókulcs 2014. május 5.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ és $\mathcal{F}_3$ metsző halmazrendszerek a $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ alaphalmazon, amelyek minden háromelemű részhalmazt tartalmaznak, azaz $\binom{[10]}{3} \subseteq \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. (Az $\mathcal{F}_i$ akkor *metsző*, ha bármely két tagjának van közös eleme.)

   Jelölje $\mathcal{F}_i'$ az $\mathcal{F}_i$ halmazrendszer háromelemű tagjainak halmazát. Világos, hogy az F_i' halmazrendszerek 3-uniformak és metszők. Az Erdős-Ko-Rado tétel miatt, ha $k < \frac{n}{2}$, akkor az n elemű alaphalmazon tetszőleges k-uniform metsző halmazrendszernek legfeljebb $\binom{n-1}{k-1}$ tagja lehet. (4 pont)
   Az F_i' halmazrendszernek tehát legfeljebb $\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 9 \cdot 4 = 36$ tagja lehet $i = 1, 2, 3$ esetén. (3 pont)
   Ezek szerint $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3| \le 3 \cdot 36 = 108 < 120 = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{10\cdot 9\cdot 4}{3\cdot 2} = \binom{10}{3}$, (2 pont)
   tehát nem létezhet a három halmazrendszer a kívánt tulajdonsággal. (1 pont)

2. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$ halmazrendszerről tudjuk, hogy ha A és B az $\mathcal{F}$ olyan különböző tagjai, amelyekre $A \subset B$ teljesül, akkor $|A| = 8$ vagy $|B| = 88$. Igazoljuk, hogy $|\mathcal{F}| \le \binom{100}{8} + \binom{100}{50} + \binom{100}{88}$. (Az első száz pozitív egész halmazát $[100]$ jelöli.)

   Képezzük az $\mathcal{F}'$ halmazrendszert úgy, hogy $\mathcal{F}$-ből elhagyjuk annak 8 ill. 88 elemű tagjait. Mivel legfeljebb $\binom{100}{8} + \binom{100}{88}$ halmazt hagytunk el, ezért $|\mathcal{F}| \le |\mathcal{F}'| + \binom{100}{8} + \binom{100}{88}$. (3 pont)
   Figyeljük meg, hogy $\mathcal{F}'$ Sperner rendszer, hiszen ha $\mathcal{F}'$ egy tagja tartalmazná $\mathcal{F}'$ egy másik tagját, akkor $\mathcal{F}'$-nek lenne 8 elemű vagy 88 elemű tagja, ami nincs. (3 pont)
   Márpedig ekkor az órán tanult Sperner tétel miatt $|\mathcal{F}'| \le \binom{100}{\lfloor \frac{100}{2} \rfloor} = \binom{100}{50}$, (3 pont)
   így $|\mathcal{F}| \le |\mathcal{F}'| + \binom{100}{8} + \binom{100}{88} \le \binom{100}{50} + \binom{100}{8} + \binom{100}{88}$, és nekünk éppen ezt kellett igazolnunk. (1 pont)
   A feladatbeli becslés éles, hiszen ha $\mathcal{F}$ a $[100]$ alaphalmaznak pontosan a $8, 50$ és 88 elemű részhalmazait tartalmazza, akkor $\mathcal{F}$-re teljesül a feladatban megkövetelt tulajdonság, és $\mathcal{F}$ elemszáma éppen $\binom{100}{8} + \binom{100}{50} + \binom{100}{88}$. (0 pont)

3. Jelölje F_i a Fibonacci sorozat i-dik elemét, azaz $F_0 = 0, F_1 = 1$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ rekurzió, ahol $a_n := F_{2n}$.

   Azt kell igazolnunk, hogy $F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. (3 pont)
   A Fibonacci számokra érvényes rekurziót felhasználva adódik, hogy $F_{2n+4} = F_{2n+3} + F_{2n+2} = 2F_{2n+2} + F_{2n+1} =$ (3 pont)
   $= 2F_{2n+2} + F_{2n+1} + F_{2n+2} - F_{2n+1} - F_{2n} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$, (3 pont)
   nekünk pedig pontosan ezt kellett megmutatnunk. (1 pont)
   Lehet ám másképp is.
   Az órán azt tanították, hogy a Fibonacci sorozat előáll két olyan mértani sor lineáris kombinációjaként, amely mértani sorok kvóciense gyöke az $x^2 - x - 1 = 0$ karakterisztikus egyenletnek. (2 pont)
   Ebből az következik, hogy az a_n sorozat előáll olyan mértani sorok lineáris kombinációjaként, amely sorok kvóciensei az iménti gyökök négyzetei. (2 pont)
   Elegendő tehát megmutanunk, hogy hogy ez utóbbi mértani sorokra teljesül a feladatbeli rekurzió, hisz ekkor az a lineáris kombinációjukra is igaz lesz. (2 pont)
   Ez viszont következik abból, ha megmutatjuk, hogy az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenletből következik az $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ egyenlőség. (2 pont)
   Egyszerű polinomosztásból adódik, de az ujjainkon is kiszámolgathatjuk, hogy $x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \cdot (x^2 + x - 1) = 0$, győztünk. (2 pont)
   Avagy:
   Azt kell igazolnunk, hogy $F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. (3 pont)

E helyett n szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $F_{n+4} = 3F_{n+2} - F_n$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re. (2 pont)
Az $n = 0$ és $n = 1$ eseteket könnyen ellenőrizhetjük. (1 pont)
Tegyük fel tehát, hogy $n < N$-re már bebizonyítottuk az indukciós állítást. Ekkor a Fibonacci sorozatra érvényes rekurzióból és az indukciós feltevésből azt kapjuk, hogy $F_{N+4} = F_{N+3} + F_{N+2} = 3F_{N+1} - F_{N-1} + 3F_N - F_{N-2} = 3(F_{N+1} + F_N) - (F_{N-1} + F_{N-2}) = 3F_{N+2} - F_N$, (3 pont)
és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

4. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban minden $n \in \mathbb{N}$-re, ha $a_0 = 8, a_1 = 30$ és $n \geq 2$ esetén $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$.

   Homogén lineáris rekurzióról van szó, amelynek az órán tanultak szerint a karakterisztikus egyenlete $x^2 - 8x + 15 = 0$. (2 pont)
   Ezt szerencsére szorzattá tudjuk bontani: $(x - 3)(x - 5) = 0$. (2 pont)
   Az a_n sorozatot tehát két mértani sor lineáris kombinációjaként, $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 5^n$ alakban keressük. (2 pont)
   A kezdőértékek segítségével számítjuk ki az α és β együtthatókat: $8 = a_0 = \alpha+\beta$ ill. $30 = a_1 = 3\alpha+5\beta$, (2 pont)
   ahonann $\alpha = 5$ és $\beta = 3$ adódik, tehát a keresett zárt alak az $a_n = 5 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n$. (1+1 pont)

5. Jelölje $a(n, k)$ az n szám egynél nagyobb egészek k tagú összegeként történő olyan előállításainak számát, amelyek bármely két tagjának különbsége legalább 2. Jelölje $b(n, k)$ az n szám pozitív egészek összegeként történő olyan előállításainak számát, amelynek minden tagja legalább kétszer szerepel a felírásban, és a fellépő tagok pontosan az 1 és k közti egészek. (Két előállítást azonosnak tekintünk, ha azok csak a tagjaik sorrendjében különböznek.) Bizonyítsuk be, hogy $a(n, k) = b(n, k)$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ és $1 < n \in \mathbb{N}$ esetén.

   A Ferrers diagram segítségével bijekciót létesítünk az $a(n.k)$-ban leszámlált ill. a $b(n, k)$-ban leszámlált partíciók között, és ezzel igazoljuk a kívánt $a(n, k) = b(n, k)$ egyenlőséget. (3 pont)
   Tekintsük tehát egy $a(n, k)$-ban leszámlált partíció Ferrers diagramját. Ebben k oszlop reprezentálja az összeg tagjait (csökkenő sorrendben), és a szomszédos oszlopok mérete legalább 2-vel különbözik, és a legkisebb oszlop legalább 2 magasságú. (2 pont)
   A duális partícióban, amit tehát vízszintesen olvasunk ki, a fellépő tagok pontosan az 1 és k közti egészek, és az i tag pontosan annyiszor lép fel, amennyi az eredeti összeg i-dik és $(i + 1)$-dik tagjának különbsége, tehát legalább kétszer. A duális partíciót tehát $b(n, k)$-ban leszámláltuk. (2 pont)
   Ha pedig egy $b(n, k)$-ban leszámlált partíció Ferrers diagramját tekintjük, annak a duálisában az összeadandók egynél nagyobb különböző számok lesznek, és a nagyság szerint egymást követők különbsége pedig legalább 2. (2 pont)
   A Ferrers diagram segítségével képzett dualitás megfeleltetés tehát csakugyan bijekciót létesít a két leszámlált halmaz között. (1 pont)

6. A G páros gráf színosztályait a fiúk $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ill. a lányok $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ halmazai alkotják. Tegyük fel, hogy a fiúk között egyetértés van a lányok értékelésében, azaz ha y_ix_j és y_ix_k a G élei valamely $j < k$ esetén, akkor $y_ix_j \leq_{y_i} y_ix_k$ teljesül. Igazoljuk, hogy G-ben pontosan egy stabil párosítás van.

   A bizonyítást $n + m$ szerinti indukcióval végezzük. Az állítás $n + m = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, hiszen egy egycsúcsú gráfban nincs más párosítás, mint az üres. (2 pont)
   Tegyük most fel, hogy minden legfeljebb $n+m-1$ pontú gráfra már beláttuk az indukciós állítást, és vizsgáljuk a feladatban megadott gráfot, legyen M annak egy stabil párosítása, ami a Gale-Shapley algoritmus szerint létezik. (2 pont)
   Legyen y^1 az x_1 lány számára legszimpatikusabb fiú. Mivel y^1 számára x_1 a legszimpatikusabb lány, ezért ha $y^1x_1 \notin M$, akkor blokkol. Tehát $y^1x_1 \in M$. (2 pont)
   Figyeljük meg, hogy ha G egyetlen éle sem blokkolja M-et, akkor a $G' = G - \{y^1, x_1\}$ gráf egyetlen éle sem blokkolja annak $M' = M - \{y^1, x_1\}$ párosítását, tehát M' stabil G'-ben. (2 pont)
   Azonban a G' gráfnak $n+m-2$ pontja van, teljesül rá a feladatban leírt tulajdonság, így az indukciós feltevés szerint pontosan egy stabil párosítása van. (2 pont)
   Ezért a G gráfnak is pontosan egy stabil párosítása van: a G' stabil párosítását ki kell egészíteni az y^1x_1 éllel. (2 pont)
   A G gráf stabil párosítását egyébként könnyű megtalálni, még csak a Gale-Shapley algoritmus sem kell hozzá: a lányok $x_1, x_2, \ldots$ sorrendben választanak párt maguknak a még párosítatlan fiúk közül. (0 pont)