Kombinatorika és gráfelmélet II.

1. ZH javítókulcs 2014. március 24.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy U lefogó ponthalmaz a G gráfban. Készítsük el a G' gráfot úgy, hogy a G minden U által feszített élét felosztjuk egy ponttal (azaz törlünk minden olyan e élt, amelynek mindkét végpontja U-beli, és felveszünk egy új v_e csúcsot, amelyet e végpontjaival kötünk össze). Igazoljuk, hogy az így kapott G' gráf perfekt.

   Vegyük észre, hogy G'-ben nem fut U-beli pontok közt él, hisz az ilyen éleket felosztottuk. (2 pont)
   Ezen kívül az osztópontok és $G \setminus U$ pontjai sem feszítenek élt, (3 pont)
   ezért G' páros gráf, melynek egyik színosztálya U. (3 pont)
   Az órán azt tanították, hogy a páros gráfok perfektek, (1 pont)
   ezért G' perfekt. (1 pont)

   Természetesen a perfekt gráf tételből sem tilos bebizonyítani az állítást. A tétel felidézése 3 pont, a páratlan kör kizárása 3 pont, a komplementeréé 4 pont.

2. Síkbarajzolható-e $(\overline{C_9})$, azaz a C_9 kör komplementere?

   A Kuratowski tétel szerint G pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem topologikus K_5, sem topologikus $K_{3,3}$ részgráfot. (2 pont)
   Márpedig G-nek van $K_{3,3}$ részgráfja, pl az, amelynek egyik színosztálya a körön az 1.,2. és 3. pont, a másik pedig az 5.,6. és 7. (7 pont)
   Ezért aztán $\overline{C_9}$ bizonyosan nem síkbarajzolható. (1 pont)

   (Egyébként topologikus K_5-öt sem nehéz találni.) Avagy:

   Az órán azt tanították, hogy $n \geq 3$ esetén egy n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n-6$ éle lehet. (2 pont)
   A mi gráfunk egyszerű, $n = 9$, (1 pont)
   az élek száma pedig $\binom{9}{2} - 9 = 27 > 21 = 3n - 6$, (6 pont)
   tehát $(\overline{C_9})$ nem síkbarajzolható. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy G legalább hat pontú, egyszerű síkbarajzolható gráf és van Euler körsétája. Mutassuk meg, hogy G-nek legalább három legfeljebb negyedfokú csúcsa van.

   Az Euler körséta létezése miatt G minden csúcsa páros fokszámú, (2 pont)
   és izolált pontoktól eltekintve G összefüggő. Feltehetjük, hogy G-nek nincs izolált pontja, hisz azok legeljebb negyedfokúak, ezért feltehető, hogy G összefüggő. Ha ezek után G-nek legfeljebb 3 csúcsa van, akkor azok mind legfeljebb negyefokúak, így az elhagyott izolált pontokkal együtt bőven megvan a három legfeljebb negyedfokú csúcs. Feltehetjük tehát, hogy G legalább hárompontú. (1 pont)
   Az ilyen gráfokról azt tanították, hogy legfeljebb $3n-6$ élük lehet, már amennyiben n a csúcsok száma. (2 pont)
   A G-beli fokszámok összege tehát legfeljebb $6n-12$. (1 pont)
   Márpedig ha G-ben csak legfeljebb két legfeljebb negyedfokú pont lenne, akkor G-nek lenne legalább $n-2$ olyan csúcsa, amelyik legalább 6-odfokú (hiszen minden fok páros, ezért 5-ödfokú csúcs nincs), (1 pont)
   továbbá legalább két olyan csúcsa, amelyek mindegyikének foka legalább kettő. Így G csúcsainak fokszámösszegére azt kapjuk, hogy $6n - 12 \geq \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6 \cdot (n-2) + 2 \cdot 2 = 6n - 8$. (3 pont)
   A kapott ellentmondás az indirekt feltevés helytelenségét igazolja, azaz G-nek csakugyan legalább három legfeljebb negyedfokú csúcsa van. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G síkgráfnak és G^* duálisának összesen 24 csúcsa és 42 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G nem összefüggő.

   Jelölje n, t, e, n^*, t^* és e^* a szokásos dolgokat. Órán az tanították, hogy $e = e^*$ és $n^* = t$, (2 pont)
   valamint, hogy $n + t = e + c + 1$, ahol G komponenseinek száma c. (4 pont)
   Tudjuk, hogy $24 = n + n^* = n + t$, (1 pont)
   ill. $42 = e + e^* = 2e$, azaz $e = 21$. (2 pont)
   Innen az adódik, hogy $c = n + t - e - 1 = 24 - 21 - 1 = 2$, (2 pont)
   tehát G csakugyan nem összefüggő, hiszen két komponense van. (1 pont)

5. A Facebook Kombi fan csoportjának 45 tagja van, köztük az ismeretségek száma 901. Ha két tag ismerős, akkor vagy barátok, vagy ellenségek. Igazoljuk, hogy biztosan található négy Kombi fan tag, akik egymás barátai vagy három olyan tag, akik egymás ellenségei.

   Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai 45 kombi fan tag, élei pedig az ismeretségek. (1 pont)
   A $T(45, 9)$ Turán gráf egy 40-reguláris 45 csúcsú gráf, éleinek száma tehát $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 45 = 20 \cdot 45 = 900$.
   (1 pont)
   A mi G gráfunknak ennél több éle van, ezért az órán tanult Turán tétel miatt G-ben van 10 pontú klikk, azaz tíz olyan kombi fan tag, akik páronként ismerősök. (3 pont)
   Legyen most H az a tíz pontú klikk, amelynek csúcsai a fenti kombitagoknak felelnek meg, és az éleket a szerint színeztük pirosra vagy zöldre, hogy ellenség avagy barát a két személy. (1 pont)
   Olyat is tanítottak az órán, hogy $R(3, 4) \leq \binom{3+4-2}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$, (2 pont)
   ezért a H gráfban bizonyosan lesz piros háromszög vagy zöld K_4. (1 pont)
   Ez pedig pontosan a feladat állítását igazolja. (1 pont)

6. Mutassuk meg, hogy $R(3, 3, 4, 4) \leq R(10, 10)$.

   Azt kell igazolni, hogy az $R(10, 10)$ pontoú teljes gráf bárhogyan is színezzük piros, fehér, zöld és narancs színekkel, bizonyosan lesz egy piros vagy fehér háromszög vagy egy zöld vagy narancs K_4.
   (2 pont)
   Legyen adott tehát a $K_{R(10,10)}$ éleinek egy ilyetén színezése. A piros és narancs színű éleket színezzük át lilára, a zöld és fehér éleket bordóra. (2 pont)
   A Ramsey tétel miatt ebben a gráfban lesz tíz olyan pont, hogy a köztük futó élek mind lilák vagy mind bordók. (1 pont)
   Valahol a füzetben az is szerepel, hogy $R(3, 4) \leq \binom{3+4-2}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$, (2 pont)
   ezért ismét a Ramsey tétel miatt ha a tíz pont között minden él bordó (tehát valójában piros vagy narancs), akkor e pontok közt lesz piros háromszög vagy zöld K_4, illetve ha a tíz pont csupa lila (azaz fehér vagy zöld) élt feszít, akkor vagy lesz fehér háromszög vagy narancs K_4. (2 pont)
   Ezzel pedig igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)