Kombinatorika és gráfelmélet II.

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a gömbön úgy adott 12, egymástól nem feltétlenül különböző pont, hogy azokból legalább 49 különböző egységtávolsára lévő pontpár választható ki. Igazoljuk, hogy a gömb sugara kisebb 1-nél.

   Legyenek a G gráf csúcsai az adott pontok, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha a megfelelő pontok egységtávolságra vannak egymástól. A feltétel szerint $|E(G) \geq 49$. (1 pont)
   Ha G nem tartalmaz K_4 részgráfot, akkor G-nek a Turán tétel szerint legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T_{12,3}$ turán gráfnak. (3 pont)
   Ez utóbbi gráf 8-reguláris, így élszáma (a fokszámösszeg fele) $6 \cdot 8 = 48$. (1 pont)
   Ez nem lehetséges, tehát G-ben van K_4 részgráf, (1 pont)
   vagyis a 12 adott pont között van 4 olyan, amik páronként egységtávolságot határoznak meg, azaz egy egységoldalú szabályos tetraédert alkotnak. (1 pont)
   A feladatban szereplő gömb tehát ennek a szabályos tetraédernek a körülírt gömbje. (1 pont)
   A szabályos egységélű tetraéder magassága kisebb egynél, hisz egységnyi hosszú él köti össze bármely csúcsát a szemközti lappal. Másrészt a tetraéder körülírt gömbjének középpontja szimmetria okok miatt minden lapnak ugyanazon az oldalán van, tehát a tetraéder belsejében, ráadásul a magasságvonalon. Ezek szerint a szóban forgó gömb sugara kisebb a tetraéder magasságánál, azaz 1-nél. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek nincs két diszjunkt tagja. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{F}$-t tartalmazó $\mathcal{F}' \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, amire $\mathcal{F}'$ metsző és $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$.

   Legyen $\mathcal{F}'$ egy $\mathcal{F}$-t tartalmazó legbővebb halmazrendszer az $[n]$ alaphalmazon. Megmutatjuk, hogy $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$. (1 pont)
   Egyrészt világos, hogy $|\mathcal{F}'| \leq 2^{n-1}$, hisz az órán tanultuk, hogy n elemű alaphalmazon ennél nem létezhet nagyobb metsző rendszer, a bizonyítás az volt, hogy $\mathcal{F}$ minden $(X, [n] \setminus X)$ párból legfeljebb egyet tartalmazhat, márpedig ilyen párból pontosan 2^{n-1} van. (2 pont)
   A másik irányú egyenlőséghez megmutatjuk, hogy minden $X \subseteq [n]$ részhalmazra az X és $[n]\setminus X$ részhalmazok közül az egyik tagja az $\mathcal{F}'$ halmazrendszernek. (2 pont)
   Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $X, [n] \setminus X \notin \mathcal{F}'$. Mivel az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer nem bővíthető a metsző tulajdonság megtartásával, ezért $\mathcal{F}' \cup \{X\}$ már nem metsző. Van tehát két diszjunkt eleme, mondjuk X és Y. Hasonlóan, ha $\mathcal{F}' \cup \{[n] \setminus X\}$ sem metsző, akkor ebben a két diszjunk tag $[n] \setminus X$ és egy másik, mondjuk Z lehet. (3 pont)
   Ekkor azonban $Y \subseteq [n] \setminus X$ és $Z \subseteq X$, tehát az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer Y és Z tagjai diszjunktak, ami ellentmond $\mathcal{F}'$ metsző tulajdonságának. Az kapott ellentmondás igazolja, hogy $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$, amiként a feladat állította. (2 pont)

3. Legfeljebb hány vektort tartalmazhat az $X \subseteq \{0,1\}^n$ halmaz, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in X$ vektorokra létezik olyan $i \in [n]$ koordináta, amire $\underline{u}_i = 1$ és $\underline{v}_i = 0$?

   Minden $\underline{u} \in \{0,1\}^n$ vektoroknak feleltessük meg az $[n]$ azon részhalmazát, aminek $\underline{u}$ a karakterisztikus vektora, azaz legyen $H_{\underline{u}} := \{i \in [n] : \underline{u}_i = 1\}$. (1 pont)
   A feladatban megkívánt feltétel azt jelenti, hogy a $\mathcal{H} := \{H_{\underline{u}} : \underline{u} \in X\}$ halmazok Sperner

rendszert alkotnak: ha ugyanis $H_{\underline{u}} \subseteq H_{\underline{v}}$, akkor nem lenne olyan i koordináta amire $\underline{u}_i = 1$ és $\underline{v}_i = 0$. (3 pont)
Az órán azt tanultuk, hogy n elemű alaphalmazon tetszőleges Sperner rendszernek legfeljebb $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tagja lehet, (2 pont)
ezért $|X| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. (1 pont)
Ha pedig X az $[n]$ halmaz $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elemű részhalmazainak karakterisztikus vektora, akkor világos, hogy teljesül a feladatbeli feltétel, és $|X| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Tehát X legfeljebb ennyi vektort tartalmazhat. (3 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci számok teljesítik az alábbi azonosságot:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

A bizonyításhoz n szerinti indukciót alkalmazunk. (1 pont)
Az $n = 1$ esetet az $F_1 = F_2 = 1$ egyenlőségből következik. (2 pont)
Tegyük fel, hogy $n-1$-re már tudjuk az állítást: $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-3} = F_{2(n-1)}$. (2 pont)
Adjunk a fenti egyenlőség mindkét oldalához F_{2n-1}-et. Ekkor azt kapjuk, hogy $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-1} = F_{2n}$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (5 pont)

5. Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 4$ és definiáljuk az (a_n) sorozatot az $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ rekurzióval. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban.

Másodrendű állandó együtthatós rekurzióval állunk szemben, aminek a karakterisztikus egyenlete $q^2 - 2q - 3 = 0$. (3 pont)
Mivel $q^2 - 2q - 3 = (q+1)(q-3)$, ezért a gyökök a -1 és a 3 lesznek. (2 pont)
Tehát az (a_n) sorozat általnános tagja $a_n = \alpha(-1)^n + \beta \cdot 3^n$, és az α, β együtthatók a kezdeti értékekből adódnak. Mivel $a_0 = 0$ és $a_1 = 4$, ezért $0 = a_0 = \alpha \cdot (-1)^0 + \beta \cdot 3^0 = \alpha + \beta$ ill. $4 = a_1 = \alpha \cdot (-1)^1 + \beta \cdot 3^1 = -\alpha + 3\beta$. (3 pont)
Innen $\alpha = -1$ és $\beta = 1$ adódik, vagyis $a_n = -(-1)^n + 3^n$ a válasz a feladat kérdésére.(2 pont)

6. Jelölje P_n azt, hogy hányféleképp bonható fel az n pozitív egész különböző pozitív számok összegére, Q_n pedig azt, hogy hányféleképp lehet n-et pozitív egészek összegére bontani úgy, hogy a tagok pontosan az 1 és k közti egészek legyenek valamilyen $k \geq 1$ egészre. Igazoljuk, hogy $P_n = Q_n$ teljesül minden $n \geq 1$-re. (Az összegre bontásokban a tagok sorrendje nem számít.)

Bijekciót mutatunk a kérdéses particiók között, és ezzel igazoljuk az állítást. Tekintsük az n egy különböző pozitívak egészekre történő π partíciójának Ferrers diagramját. (2 pont)
Vegyük észre, hogy ebben minden oszlop különböző magasságú, ezért a konjugált partícióban a legkisebb tagok 1-ek, a második legkisebb tagok 2-k, stb lesznek. Vagyis a konjugált partíció rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az abban szereplő tagok pontosan az 1 és k közti egészek valamilyen k pozitív egészre. (4 pont)
Másrészről, ha a σ partíció rendelkezik az utóbbi tulajdonsággal, akkor annak konjugáltjában nem fordulhat elő két egyforma tag. Ellenkező esetben ugyanis létezne olyan t pozitív egész ami nem tagja σ-nak, ám σ-ban t-nél kisebb és t-nél nagyobb tag is van. Ez pedig lehetetlen. Ezek szerint σ konjugáltjában valóban minden tag különböző. A partíciók konjugálása tehát valóban a kívánt bijekciót hozza létre. (4 pont)