Kombinatorika és gráfelmélet II.
1. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Igazoljuk, hogy ha a G gráf bármely feszített részgráfjának van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, akkor $ch(G) \leq 6$.

   Azt kell megmutatni, hogy ha minden csúcs színezésére 6 szín áll rendelkezésre, akkor minden csúcshoz választható egy-egy szín úgy, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen. (1 pont)
   Legyen v_n a G egy legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, v_{n-1} a $G - v_n$ feszített részgráf egy legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, általában v_{n-i} a korábban definiált $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-i+1}$ csúcsok elhagyásával megmaradó feszített részgráf legfeljebb 5-ödfokú csúcsa. (2 pont)
   Az így kapott $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrend rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges v_i csúcs legfeljebb 5 csúccsal szomszédos a $v_1, \ldots, v_{i-1}$ csúcsok közül. (3 pont)
   Ha tehát ebben a sorrendben futtatjuk a mohó színezést, akkor minden csúcshoz választhatunk a legfeljebb 5 kizárt színtől különböző színt a lehetséges 6 szín közül. (3 pont)
   Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható, n csúcsú gráf, akkor kiválasztható G-nek legfeljebb $n - 2$ éle úgy, hogy azokat G-ből törölve páros gráfot kapjunk.

   A négyszíntétel miatt G csúcshalmaza legfeljebb 4 független színosztály uniójára bontható. (2 pont)
   Arról is volt szó az órán, hogy egy n csúcsú egyszerű gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
   Ha egy színezés két színosztálya között töröljük az összes élt, akkor e két színosztály csúcsai azonos színnel színezhetővé válnak, így az eredeti színezéshez képest eggyel kevesebb szín is elég az éltörlések utáni részgráf színezéséhez. (2 pont)
   A cél tehát az, hogy a 4 színosztályt (melyek között lehetnek üresek is) két párba állítsuk és a színosztálypárokon belül futó éleket töröljük. Ezáltal a gráf csúcshalmaza két független ponthalmaz úniója lesz, vagyis páros gráf marad. (1 pont)
   Világos, hogy a 4 színosztályt 3-féleképp lehet párokba rendezni, és az is azonnal adódik, hogy G minden éle pontosan egy párbaállításkor fog párbaállított színosztályok között futni. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a három párbaállítás valamelyikében G éleinek legfeljebb harmada, azaz legfeljebb $n - 2$ él fut a párbaállított színosztályok között. (1 pont)
   Ezen legfeljebb $n - 2$ élt törölve pedig páros gráfot kapunk, ahogy azt a feladat megkívánja. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak minden tartományát 4 él, míg a G^* duális minden egyes tartományát 3 vagy 4 él határolja. Határozzuk meg G^* háromszöglapjainak számát.

   Jelölje n, t, e és n^*, t^*, e^* a megfelelő paramétereket. A dualitás miatt $n^* = t$ és $e^* = e$. (2 pont)
   Ha G nem lenne összefüggő, akkor lenne G-nek olyan tartománya, amit legalább két komponens élei határolnak, és mivel G egyszerű, ezért ezt a tartományt legalább 6 él határolná. A feltétel szerint ez nem lehetséges, ezért G összefüggő, így a tanultak szerint duálisa G^*-nak, vagyis $t^* = n$. (1 pont)
   A G gráf öf tulajdonságából az Euler formula fennállása is következik, azaz $n + t = e + 2$. (2 pont)
   Igaz továbbá az is, hogy a lapokat határoló élek számának összege éppen az élszám kétszerese, hiszen minden élnek két partja van, mindegyiken egy-egy lappal. (1 pont)
   Ezért $4t = 2e = 2e^* = 4t_4 + 3t_3$, ahol t_4 ill. t_3 jelöli a G^* négyszög- ill. háromszöglapjainak számát, és ahol persze $t_4 + t_3 = t^* = n$. (2 pont)
   Az Euler formulát 4-gyel végigszorozva és a fenti egyenlőségeket felhasználva kapjuk, hogy

   $$4e + 8 = 4n + 4t = 4t^* + 4t = 4(t_4 + t_3) + 4t = 4t_4 + 3t_3 + t_3 + 4t = 2e + t_3 + 2e = 4e + t_3 \ ,$$

   tehát $t_3 = 8$ a G^* háromszöglapjainak száma. (2 pont)
   A feladat feltételeit kielégítő gráf létezik, pl a kocka élgráfja, de van más is. (0 pont)

4. Mutassuk meg, hogy ha v a G perfekt gráf egy csúcsa, és G-hez hozzáveszünk egy új v' csúcsot, amit v minden szomszédjával összekötünk, akkor az így kapott gráf is perfekt lesz.

   Azt kell igazolni, hogy a feladatban konstruált G^* gráf minden feszített G' részgráfjára $\chi(G') = \omega(G')$ teljesül. (2 pont)
   Legyen tehát G' ilyen feszített részgráf. Két eset lehetséges. Először, ha G' a v és v' csúcsok közül legfeljebb egyet tartalmaz, akkor G' izomorf a G egy feszített részgráfjával, így G perfektségéből $\chi(G') = \omega(G')$ adódik. (3 pont)

Ha pedig G' a v és v' csúcsok mindegyikét tartalmazza, akkor $G' - v'$ a G feszített részgráfja, így $\chi(G' - v') = \omega(G' - v')$, ismét csak G perfektsége okán. (2 pont)
Ráadásul $\chi(G') \geq \chi(G' - v') \geq \chi(G')$, hiszen G'-nek $G' - v'$ részgráfja, ám v' megkaphatja v színét tetszőleges színezésben, tehát $\chi(G') = \chi(G' - v')$. (1 pont)
Az is igaz, hogy $\omega(G') \geq \omega(G' - v') \geq \omega(G')$, ugyanis részgráf klikkmérete nem lehet nagyobb az eredetiénél, továbbá G' tetszőleges K klikkje a v és v' közül legfeljebb az egyiket tartalmazza, így K izomorf $G' - v'$ egy klikkjével. Ismét az adódott, hogy $\omega(G') = \omega(G' - v')$. (1 pont)
A fenti három összefüggésből $\chi(G') = \omega(G')$ adódik, és nekünk épp ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $G = (V, E)$ perfekt, legalább kétélű gráf E élhalmaza előállítható nemüres, diszjunkt E_1 és E_2 élhalmazok uniójaként úgy, hogy (V, E_1) és (V, E_2) perfektek gráfok legyenek.

Könnyen látható, hogy ha G-nek legalább 2 éle van, akkor G-nek olyan v csúcsa, ami G legalább egy élének végpontja és legalább egy másiknak nem. (1 pont)
Legyen E_1 a v-re illeszkedő élek, E_2 pedig a v-re nem illeszkedő élek halmaza. Világos, hogy E_1 és E_2 diszjunktak, uniójuk pedig E. (2 pont)
Mivel (V, E_1) fa, és így páros gráf, ezért a tanultak szerint perfekt. (3 pont)
A (V, E_2) gráf nem más, mint a $V \setminus \{v\}$ ponthalmaz által feszített gráf és még egy izolált pont. A G gráf perfektsége miatt a $G - v$ feszített részgráf is perfekt. (3 pont)
Könnyen látható, hogy ha egy gráf minden komponense perfekt, akkor a gráf is az, ezért (V, E_2) is perfekt, és mi pontosan ezt akartuk bizonyítani. (1 pont)

6. Mutassuk meg, hogy $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k}) \leq k!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}) + 1$.

Vezessük be az $a(k) := k!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}) + 1$ jelölést. A feladat állítását k szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 1$, akkor $R(3)$ azt jelenti, hogy legalább hány csúcsának kell lennie annak a teljes gráfnak, aminek az éleit ugyanarra a színre színezve bizonyosan kapunk egyszínű K_3-at. Könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy $3 = R(3) = 1!(1 + \frac{1}{1!}) + 1 = a(1)$, tehát $k = 1$ esetén egyenlőség áll.[1] (3 pont)
Tegyük fel, hogy $1, 2, \ldots, k-1$-re már igazoltuk a feladat állítását. Azt kell megmutatni, hogy ha az $a(k)$ csúcsú teljes gráf éleinek tetszőleges k-színezése esetén lesz egyszínű K_3. (2 pont)
Legyen v a egy tetszőleges csúcs. Mivel a v-ből induló éleket is k színnel színeztük, a v-től különböző csúcsok k csoportba sorolhatók aszerint, hogy v-hez milyen színű élen kapcsolódnak. (1 pont)
A skatulya-elv (triviális általánosítása) miatt lesz tehát olyan csoport, ami a maradék csúcsoknak legalább k-adrészét tartalmazza, szám szerint tehát legalább $\lceil (a_1 - 1)/k \rceil = \lceil \frac{k!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!})+1-1}{k} \rceil = \lceil (k-1)!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}) \rceil = (k-1)!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}) + 1 = a(k-1)$ csúcsot. (2 pont)
Tekintsük ezt a csoportot, aminek elemeit a v-vel (mondjuk) 1-es színű él köti össze. Ha ezen a csoporton belül fut további 1-es színű él, akkor G adott színezésében van egyszínű K_3, és a továbbiakban nincs mit bizonyítanunk. (1 pont)
Ha azonban a csoporton belül nem fut 1-es színű él, akkor a csoporton belüli éleket $k-1$ színnel színeztük. Márpedig a csoporton belül legalább $a(k-1)$ csúcs van, így az indukciós feltevés miatt bizonyosan tartalmaz egyszínű K_3-at. Ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

[1] Igazából itt eleg az egyenlőtlenséget igazolni. Ehhez pedig csak azt kell látni, hogy ha a $K_{a(1)}$ éleit 1 színnel színezzük, akkor bizonyosan találunk valahol a gráfban egy egyszínű K_3-at.