

Kombinatorika és gráfelmélet II.

Első pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az n csúcsú G gráfra igaz, hogy bármely k pontú részgráfjának (ahol $1 \leq k \leq n$) legfeljebb $4k$ éle van. Mutassuk meg, hogy $ch(G) \leq 9$.

Azt kell megmutatnunk, hogy bárhogyan is adunk meg legalább 9 színt tartalmazó listákat az egyes csúcsokhoz, mindig tudunk úgy választani ezekből, hogy G -nek egy jó színezését kapjuk. (2 pont)

Először megmutatjuk, hogy ha G' a G gráf tetszőleges feszített részgráfja, akkor G' -nek van legfeljebb 8-adfokú csúcsa. Ha ugyanis k csúcs feszíti G' -t, akkor a feltétel szerint G' -nek legfeljebb $4k$ éle van. Ezért G' fokszámösszege legfeljebb $8k$, van tehát a k csúcs között legfeljebb 8-adfokú. (2 pont)

Legyen v_n a G egy legfeljebb 8-adfokú csúcsa, legyen v_{n-1} a $G - v_1$ egy legfeljebb 8-adfokú csúcsa, sít, azaz v_i a $G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$ gráf egy legfeljebb 8-adfokú csúcsa. (2 pont)

Színezzük mohón G csúcsait $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendben, azaz sorra keressünk minden egyes csúcsnak egy olyan színt a listájából, ami különbözik a korábban már megszínezett szomszédjainak a színétől. (1 pont)

A v_i színezésekor v_i -nek a fenti konstrukció miatt legfeljebb 8 szomszédja van a korábban kiszínezett csúcsok között, tehát a listán szereplő 9 színből bizonyosan tudunk megfelelőt választani, (2 pont)

tehát $ch(G) \leq 9$. (1 pont)

2. Igazoljuk, hogy ha $G = (V, E)$ síkbarajzolható gráf, akkor G előáll két perfekt gráf uniójaként, azaz léteznek olyan E_1 és E_2 élhalmazok, amire (V, E_1) és (V, E_2) perfektek, továbbá $E = E_1 \cup E_2$.

A 4-színtétel szerint $\chi(G) \leq 4$, (2 pont)

azaz $V(G)$ felbontható a V_1, V_2, V_3, V_4 független halmazok uniójára, és G minden éle két különböző halmaz között fut. (1 pont)

Legyen G_1 az a gráf, amint a $V(G)$ pontthalmazon a $V_1 \cup V_2$ csúcsait a $V_3 \cup V_4$ -beli csúcsokkal összekötő G -beli élek alkotnak. Legyen továbbá G_2 az a gráf a $V(G)$ csúcsain, amit a V_1 és V_2 között futó ill. a V_3 és V_4 között futó élek határoznak meg. (3 pont)

Világos, hogy $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$, tehát G valóban a G_1 és G_2 uniója. (1 pont)

A konstrukció folytán G_1 és G_2 is páros gráfok, (1 pont)

és mint ilyenek, perfektek. Ezzel a feladat állítást igazoltuk. (2 pont)

Egyébként G_1 és G_2 éldiszjunktak is, de ez nem volt feltétel. (0 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak minden tartományát 3 él, míg a G^* duális minden egyes tartományát 3 vagy 6 él határolja. Határozzuk meg G^* háromszöglapjainak számát.

Jelölje n, t, e és n^*, t^*, e^* a megfelelő paramétereket. A dualitásból $n^* = t$ és $e^* = e$. (2 pont)

Ha G nem lenne öf, akkor lenne G -nek olyan tartománya, amit legalább két komponens élei határolnak, de G egyszerű, így ezt a tartományt legalább 6 él határolná. A feltétel szerint ez lehetetlen, ezért G összefüggő, így a tanultak szerint duálisa G^* -nak, vagyis $t^* = n$. (1 pont)

A G gráf öf tulajdonsága miatt az Euler formula is fennáll, azaz $n + t = e + 2$. (2 pont)

Igaz továbbá az is, hogy a lapokat határoló élek számának összege éppen az élszám kétszerese, hiszen minden élnek két partja van, mindegyiken egy-egy lappal. (1 pont)

Ezért $3t = 2e = 2e^* = 6t_6 + 3t_3$, ahol t_6 ill. t_3 jelöli a G^* négyszög- ill. háromszöglapjainak számát, és ahol persze $t_6 + t_3 = t^* = n$. (2 pont)

Az Euler formulát 6-mal végigsorozva és a fenti egyenlőségeket felhasználva kapjuk, hogy

$$6e + 12 = 6n + 6t = 6t^* + 6t = 6(t_6 + t_3) + 6t = 6t_6 + 3t_3 + 3t_3 + t_3 + 6t = 2e + 3t_3 + 4e = 6e + 3t_3,$$

tehát $t_3 = 4$ a G^* háromszöglapjainak száma. (2 pont)

Egyébként létezik a feladat feltételeit kielégítő gráf (pl a K_4 , de van más is). (0 pont)

4. Egy szállodába minden nap egy vendég érkezik, az i -dik napon érkező vendég pontosan $2i - 1$ éjszakát marad, ahol $i = 1, 2, \dots, 30$. Határozzuk meg, hány szobára van szükség, ha minden szobát csak a vendég távozását követő napon lehet ismételtén kiadni.

Alkossa a G gráf csúcshalmazát a 30 vendég. Két csúcs között akkor fusson él, ha az adott vendégek találkozhattak, vagyis nem lehet nekik ugyanazt a szobát kiadni. (1 pont)

Egy szoba tehát pontosan akkor adható ki néhány vendégnek, ha ezen vendégeknek megfelelő csúcsok független halmazt alkotnak G -ben. (1 pont)

A lehető legkevesebb szoba felhasználása azt jelenti, hogy G csúcsait a lehető legkevesebb független halmazzal fedjük, azaz G csúcsait minimális számú színnel színezzük ki. (2 pont)

Világos, hogy G intervallumgráf, ahol az i -dik vendégnek megfelelő csúcs az $[i, 3i - 1]$ zárt intervallumhoz tartozik. (1 pont)

Tanultuk, hogy az intervallumgráfok perfektek, (1 pont)

ezért $\chi(G) = \omega(G)$, tehát minket G legnagyobb klikkjének mérete érdekel. (1 pont)

Egy klikknek megfelelő intervallumok páronként metszők, ezért van közös pontjuk. (1 pont)

Ezért G nem bővíthető klikkjei pontosan azoknak a vendégeknek felelnek meg, akik valamelyik napon a szállodában tartózkodtak. (1 pont)

Az i -dik napon azok a vendégek vannak a szállodában, akik az $\lceil \frac{i+1}{3} \rceil$ -dik és az i -dik nap között érkeztek. Ezért a hotel a 30-dik napon lesz a legtelítettebb, 20 vendéggel. Ezek szerint $\chi(G) = \omega(G) = 20$ a szükséges szobák minimális száma. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, és G független csúcsainak maximális száma $\alpha(G) = 9$. Határozzuk meg a $\overline{G}$ komplementer gráf kromatikus számát.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy $\omega(\overline{G}) = \alpha(G) = 9$. (3 pont)

Az órán tanult gyenge perfekt gráf tétel miatt a $\overline{G}$ komplementergráf is perfekt, (3 pont)

így $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ is teljesül. (3 pont)

A fentiek alapján tehát $\chi(\overline{G}) = 9$ a válasz. (1 pont)

6. A K_n teljes gráf éleit kiszíneztük pirossal és zölddel. Az alábbi állítások közül melyikből következik, hogy van a gráfban 5 olyan csúcs, amik közt minden él piros? a) $n \leq R(5, 5)$
 b) $n \leq R(5, 5)$ és nincs zöld K_5 c) $n \geq R(4, 5)$ és nincs zöld K_5
 d) $n \geq R(4, 5)$ és nincs zöld K_4 e) $n = 10000$ és nincs zöld K_3

Az $R(k, l)$ Ramsey szám azt a legkisebb n -t jelöli, amire igaz, hogy K_n éleit pirossal és zölddel színezve bizonyosan lesz piros K_k vagy zöld K_l részgráf. (2 pont)

Mivel az a) esetben elképzelhető, hogy minden él zöld, nem feltétlenül lesz piros K_5 . (1 pont)

A b) esetben $n = 4$ is megengedett, amikor is nem lesz piros K_5 . (1 pont)

A c) esetben azért nincs feltétlenül piros K_5 , mert egy $R(4, 5)$ csúcsú teljes gráf élei kiszínezhetők két színnel úgy, hogy az egyik színből se jöjjön létre egyszínű K_5 (csak egy egyszínű K_4 valamelyik színből). (2 pont)

A d) esetben a definíció szerint bizonyosan lesz zöld K_4 vagy piros K_5 , ám az előbbi kizárt, tehát az utóbbi lesz igaz. (2 pont)

Az e) esethez azt kell megfigyelni, hogy $10000 > 21 = \binom{7}{2} = \binom{5+3-2}{3-1} \geq R(5, 3)$, (1 pont)

ezért a piros és zöld élű 10000 csúcsú teljes gráfban bizonyosan van zöld háromszög vagy piros K_5 . Az előbbi kizártuk, így hát az utóbbi igaz. (1 pont)