Gráfok és algoritmusok

A maxvissza sorrend további alkalmazásai

2024. március 21.

Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.

Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.

Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.

Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.
- A mai órán a k-szoros (él)összefüggőség ritka tanújának előállításához segít hozzá a maxvissza sorrend.

Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.
- A mai órán a k-szoros (él)összefüggőség ritka tanújának előállításához segít hozzá a maxvissza sorrend.
- Az itt közölt bizonyítások Frank András Kombinatorikus algoritmusok II. c jegyzetén alapulnak. (`andrasfrank.web.cs.elte.hu/jegyzet/kombal`)

A maxvissza sorrendhez tartozó élhalmazok (ismétlés)

- Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje. Az élcímkézés definiálásához irányítsunk minden élt balról jobbra, azaz a sorrendben korábbi csúcsából a későbbibe.

A maxvissza sorrendhez tartozó élhalmazok (ismétlés)

- Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje. Az élcímkézés definiálásához irányítsunk minden élt balról jobbra, azaz a sorrendben korábbi csúcsából a későbbibe.
- Felcímkézzük az éleket. Ha $v_i v_j$ a G egy irányított éle (azaz $i < j$) és v_i a v_j **beszomszédai** közül a sorrendben a k-dik, akkor a $v_i v_j$ él címkéje k lesz.

A maxvissza sorrendhez tartozó élhalmazok (ismétlés)

- Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje. Az élcímkézés definiálásához irányítsunk minden élt balról jobbra, azaz a sorrendben korábbi csúcsából a későbbibe.
- Felcímkézzük az éleket. Ha $v_i v_j$ a G egy irányított éle (azaz $i < j$) és v_i a v_j **beszomszédai** közül a sorrendben a k-dik, akkor a $v_i v_j$ él címkéje k lesz.
- Legyen F_k a k címkét kapó élek halmaza, G_k pedig a $(k-1)$-nél nagyobb címkéjű élek gráfja a G csúcshalmazán. Mivel G_k minden csúcsából vezet a k címkéjű éleken út az adott komponens gyökerébe (sorrendben első csúcsába), F_k a G_k gráf egy, a gyökereiből kifelé irányított feszítő erdeje.

A maxvissza sorrendhez tartozó élhalmazok (ismétlés)

- Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje. Az élcímkézés definiálásához irányítsunk minden élt balról jobbra, azaz a sorrendben korábbi csúcsából a későbbibe.
- Felcímkézzük az éleket. Ha $v_i v_j$ a G egy irányított éle (azaz $i < j$) és v_i a v_j **beszomszédai** közül a sorrendben a k-dik, akkor a $v_i v_j$ él címkéje k lesz.
- Legyen F_k a k címkét kapó élek halmaza, G_k pedig a $(k-1)$-nél nagyobb címkéjű élek gráfja a G csúcshalmazán. Mivel G_k minden csúcsából vezet a k címkéjű éleken út az adott komponens gyökerébe (sorrendben első csúcsába), F_k a G_k gráf egy, a gyökereiből kifelé irányított feszítő erdeje.
- **Élcímkézési lemma:** Ha v_i és v_j az F_k egy komponensének két csúcsa, akkor v_i és v_j között vezet k db éldiszjunkt út: F_1-ben az 1-es címkéjű éleken, F_2-ben a 2-es címkéjűeken, sít.

A maxvissza sorrendhez tartozó élhalmazok (ismétlés)

- Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje. Az élcímkézés definiálásához irányítsunk minden élt balról jobbra, azaz a sorrendben korábbi csúcsából a későbbibe.
- Felcímkézzük az éleket. Ha $v_i v_j$ a G egy irányított éle (azaz $i < j$) és v_i a v_j **beszomszédai** közül a sorrendben a k-dik, akkor a $v_i v_j$ él címkéje k lesz.
- Legyen F_k a k címkét kapó élek halmaza, G_k pedig a $(k-1)$-nél nagyobb címkéjű élek gráfja a G csúcshalmazán. Mivel G_k minden csúcsából vezet a k címkéjű éleken út az adott komponens gyökerébe (sorrendben első csúcsába), F_k a G_k gráf egy, a gyökereiből kifelé irányított feszítő erdeje.
- **Élcímkézési lemma:** Ha v_i és v_j az F_k egy komponensének két csúcsa, akkor v_i és v_j között vezet k db éldiszjunkt út: F_1-ben az 1-es címkéjű éleken, F_2-ben a 2-es címkéjűeken, sít.
- Innen azonnal adódik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus kulcslemmája, de a ritka tanú létezését is igazolni tudjuk.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G egy maxvissza sorrendje, és legyen $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G egy maxvissza sorrendje, és legyen $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza.
Mivel F_i feszítő erdő, ezért $|F_i| \leq n-1$, tehát $|F| \leq k(n-1)$.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G egy maxvissza sorrendje, és legyen $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza.
Mivel F_i feszítő erdő, ezért $|F_i| \leq n-1$, tehát $|F| \leq k(n-1)$.
Azt kell igazolni, bárhogy is vágjuk ketté a V csúcshalmazt, F legalább k olyan élt tartalmaz, ami a két rész között fut:
$\forall\, \emptyset \neq X \subsetneq V$ esetén X-ből legalább k db F-beli (ir.tatlan) él lép ki.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G egy maxvissza sorrendje, és legyen $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza.
Mivel F_i feszítő erdő, ezért $|F_i| \leq n-1$, tehát $|F| \leq k(n-1)$.
Azt kell igazolni, bárhogy is vágjuk ketté a V csúcshalmazt, F legalább k olyan élt tartalmaz, ami a két rész között fut:
$\forall\, \emptyset \neq X \subsetneq V$ esetén X-ből legalább k db F-beli (ir.tatlan) él lép ki.
I. eset G minden X-ből kilépő éle F-beli. G k-élöf, kész vagyunk.

Ritka tanú k-szoros élösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ gráf **k-szoros élösszefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-élöf.
Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

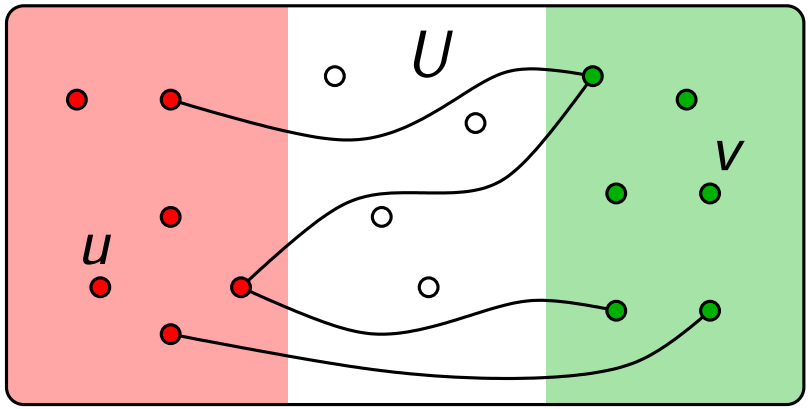
Tétel: Ha $\lambda(G) \geq k$ és $n = |V(G)|$, akkor van G k-élösszefüggőségének egy legfeljebb $k \cdot (n-1)$ élből álló tanúja.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G egy maxvissza sorrendje, és legyen $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza. Mivel F_i feszítő erdő, ezért $|F_i| \leq n-1$, tehát $|F| \leq k(n-1)$.
Azt kell igazolni, bárhogy is vágjuk ketté a V csúcshalmazt, F legalább k olyan élt tartalmaz, ami a két rész között fut:
$\forall\, \emptyset \neq X \subsetneq V$ esetén X-ből legalább k db F-beli (ir.tatlan) él lép ki.
I. eset G minden X-ből kilépő éle F-beli. G k-élöf, kész vagyunk.
II. eset X-ből kilép egy k-nál nagyobb címkéjű $v_i v_j$ él. Láttuk, hogy $1 \leq \ell \leq k$ esetén vezet út v_i-ből és v_j-be az ℓ címkéjű éleken. Ezek mindegyike tartalmaz X-ből kilépő F-beli élt. Győztünk. $\square$

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Megj: A vegyes vágás tekinthető a csúcsok piros-fehér-zöld színezésének: az U-beli csúcsok fehérek, E' pedig a piros és zöld csúcsokat összekötő élekből áll.



A vegyes vágás pontosan a piros-zöld csúcspárokat szeparálja.

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

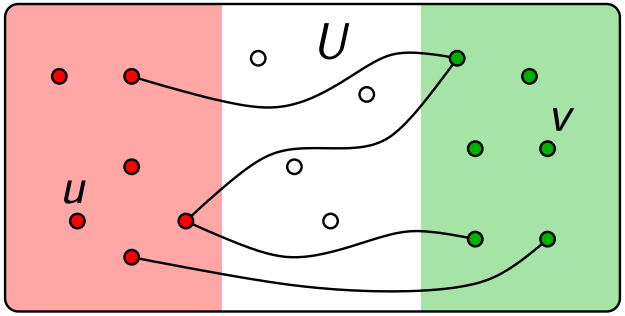
Köv: (Menger) Az u és v között futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális $\kappa(u, v)$ száma megegyezik az u-t és v-t szeparáló vegyes vágás minimális méretével.

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Köv: (Menger) Az u és v között futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális $\kappa(u, v)$ száma megegyezik az u-t és v-t szeparáló vegyes vágás minimális méretével.

Biz: Van $\kappa(u, v)$ bpd uv-út, ezért minden vegyes vágás legalább $\kappa(u, v)$ méretű, hisz ezen utak mindegyikéről tartalmaz csúcsot vagy élt.



Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Köv: (Menger) Az u és v között futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális $\kappa(u, v)$ száma megegyezik az u-t és v-t szeparáló vegyes vágás minimális méretével.

Biz: Van $\kappa(u, v)$ bpd uv-út, ezért minden vegyes vágás legalább $\kappa(u, v)$ méretű, hisz ezen utak mindegyikéről tartalmaz csúcsot vagy élt.

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Köv: (Menger) Az u és v között futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális $\kappa(u, v)$ száma megegyezik az u-t és v-t szeparáló vegyes vágás minimális méretével.

Biz: Van $\kappa(u, v)$ bpd uv-út, ezért minden vegyes vágás legalább $\kappa(u, v)$ méretű, hisz ezen utak mindegyikéről tartalmaz csúcsot vagy élt.

Ha $uv \notin E$, akkor Menger idevágó tétele az uv-utak lefoghatók $\kappa(u, v)$ ponttal, ezért van $\kappa(u, v)$ méretű pontvágás, ami egyúttal vegyes vágásnak is tekinthető.

Ha pedig $uv \in E$, akkor $G' = G - uv$-ben van $k - 1$ méretű, u-t és v-t szeparáló pontvágás, és ezt az uv éllel kiegészítve a G egy k méretű, u-t és v-t szeparáló vegyes vágását kapjuk. $\square$

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Az élcímkézési lemma erős változata

Def: $G = (V, E)$, $u, v \in V$, $U \subset V$, $E' \subseteq E$ esetén (U, E') egy **u-t és v-t szeparáló vegyes vágás**, ha $u, v \notin U$ és a $G - U - E'$ gráf nem tartalmaz uv-utat. Az (U, E') vegyes vágás **mérete** $|U| + |E'|$.

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Megj: (1) A tételben szereplő $\kappa(v_i, v_j) \geq k$ állítás nem csak a G gráfra igaz, hanem a $G' = (V(G), F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k)$ részgráfra is. Ugyanis $v_1, v_2 \ldots$ a G' csúcsainak is maxvissza sorrendje, ezért v_i és v_j a G' gráf k-as címkéjű élei által alkotott feszítő erdejének is ugyanabba a komponensébe esnúek.

(2) Ha G egyszerű, akkor a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmájánál több is igaz. Nevezetesen, ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak egy maxvissza sorrendje, akkor $\kappa(v_{n-1}, v_n) \geq d(v_n)$.

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1\checkmark$. $(k-1) \mapsto k$:

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1\checkmark$. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1\checkmark$. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle.

Ekkor $(U, E' \setminus F_1)$ G_2-ben egy v_i-t és v_j-t szeparáló vegyes vágás. Láttuk, hogy G maxvissza sorrendje G_2-ben is maxvissza sorrend, ezért ha v_i és v_j a G_2-ben $(k-1)$-es címkét kapó élek által alkotott feszítő erdő ugyanazon komponensébe esnek. Az indukciós feltevés miatt tehát

$|U| + |E'| \geq |U| + |E' \setminus F_1| + 1 \geq k - 1 + 1 = k$, szuper.

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1$✓. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle. ✓

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1$✓. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle. ✓

II. eset $E' \cap F_1 = \emptyset$, azaz F_1-nek nincs pz éle.

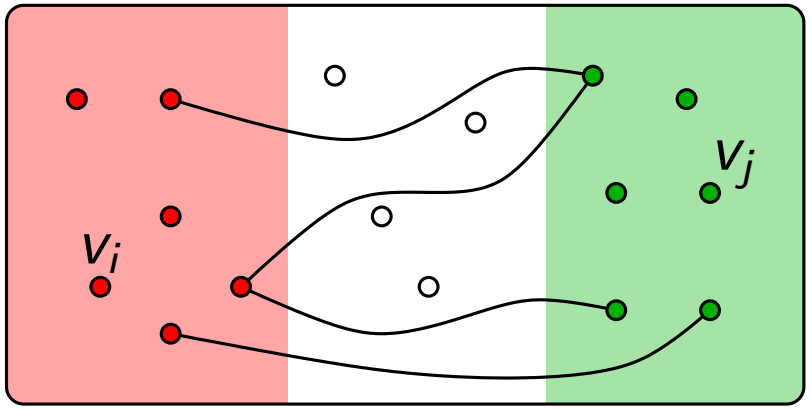
Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1$✓. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle. ✓

II. eset $E' \cap F_1 = \emptyset$, azaz F_1-nek nincs pz éle. P-z színcserével feltehető, hogy v_1 nem zöld. F_1-ben nincs pz él, ezért minden olyan F_1-beli út tartamlaz fehér csúcsot, ami v_1-ből zöld csúcsba vezet.



Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1$✓. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle. ✓

II. eset $E' \cap F_1 = \emptyset$, azaz F_1-nek nincs pz éle. P-z színcserével feltehető, hogy v_1 nem zöld. F_1-ben nincs pz él, ezért minden olyan F_1-beli út tartamlaz fehér csúcsot, ami v_1-ből zöld csúcsba vezet.

Az élcímkézési lemma erős változata

Tétel: Tfh G egyszerű és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrendje. Ha v_i, v_j az F_k egyazon komponensébe esnek, akkor $\kappa(v_i, v_j) \geq k$.

Biz: Feltehető, hogy G öf. Indukció k-ra: $k = 1$✓. $(k-1) \mapsto k$: Tek. egy $v_i v_j$-szeparáló (U, E') vegyes vágást. Az indukció miatt a G_2 gráf minden $v_i v_j$-szeparáló vegyes vágása legalább $k-1$ méretű.

I. eset $E' \cap F_1 \neq \emptyset$, azaz F_1-nek van pz éle. ✓

II. eset $E' \cap F_1 = \emptyset$, azaz F_1-nek nincs pz éle. P-z színcserével feltehető, hogy v_1 nem zöld. F_1-ben nincs pz él, ezért minden olyan F_1-beli út tartamlaz fehér csúcsot, ami v_1-ből zöld csúcsba vezet. Legyen u a maxvissza sorrend első fehér csúcsa. Minden zöld csúcs u után áll a maxvissza sorrendben. Legyen v az u tetsz. zöld szomszédja. Ha $uv \notin F_1$, akkor F_1 $v_1 v$-útján nem lenne fehér csúcs. Ezért $uv \in F_1$. Ha u-t átszínezzük pirosra, akkor a kapott vegyes vágás ponthalmaza 1-gyel csökken, élhalmaza pedig csak F_1-beli élekkel bővül. Ezért $(U - u, E')$ a G_2 egy vegyes vágása, így $|U| + |E'| = (1 + |U - u|) + |E'| \geq 1 + k - 1 = k$, győzelem. □

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha G k-összefüggő, akkor G k-összefüggöségének van egy legfeljebb $kn - \binom{k+1}{2}$ élből álló tanúja, ahol $n = |V(G)|$.

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha G k-összefüggő, akkor G k-összefüggőségének van egy legfeljebb $kn - \binom{k+1}{2}$ élből álló tanúja, ahol $n = |V(G)|$.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrend és $G' = (V, F)$, ahol $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza. Igazoljuk, hogy tetsz. (U, E') vegyes vágásra $|U| + |E' \cap F| \geq k$.

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha G k-összefüggő, akkor G k-összefüggőségének van egy legfeljebb $kn - \binom{k+1}{2}$ élből álló tanúja, ahol $n = |V(G)|$.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrend és $G' = (V, F)$, ahol $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza. Igazoljuk, hogy tetsz. (U, E') vegyes vágásra $|U| + |E' \cap F| \geq k$.
I. eset $E' \subseteq F$. Ekkor $|U| + |E' \cap F| = |U| + |E'| \geq k$ a G k-szoros összefüggősége folytán.

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha G k-összefüggő, akkor G k-összefüggőségének van egy legfeljebb $kn - \binom{k+1}{2}$ élből álló tanúja, ahol $n = |V(G)|$.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrend és $G' = (V, F)$, ahol $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza. Igazoljuk, hogy tetsz. (U, E') vegyes vágásra $|U| + |E' \cap F| \geq k$.

I. eset $E' \subseteq F$. Ekkor $|U| + |E' \cap F| = |U| + |E'| \geq k$ a G k-szoros összefüggősége folytán.

II. eset $v_i v_j \in E' \setminus F$. Ekkor a vegyes vágás szeparálja v_i-t és v_j-t, és a $v_i v_j$ él címkéje legalább $k + 1$. Így v_i és v_j F_k-nak ugyanabba a komponensébe esnek. Az élcímkézési lemma erős változata miatt $\kappa_{G'}(v_i, v_j) \geq k$ tehát G'-ben minden v_i-t és v_j-t szeparáló vegyes vágás legalább k méretű, hurrá.

Ritka tanú k-szoros pontösszefüggőségre

Def: Az $F \subseteq E$ élhalmaz a $G = (V, E)$ egyszerű gráf **k-szoros összefüggőségének tanúja**, ha a $G' = (V, F)$ gráf k-összefüggő. Értelmes cél egy minél kevesebb élből álló tanú keresése.

Tétel: Ha G k-összefüggő, akkor G k-összefüggőségének van egy legfeljebb $kn - \binom{k+1}{2}$ élből álló tanúja, ahol $n = |V(G)|$.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrend és $G' = (V, F)$, ahol $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ a legfeljebb k címkéjű élek halmaza. Igazoljuk, hogy tetsz. (U, E') vegyes vágásra $|U| + |E' \cap F| \geq k$.

I. eset $E' \subseteq F$. Ekkor $|U| + |E' \cap F| = |U| + |E'| \geq k$ a G k-szoros összefüggősége folytán.

II. eset $v_i v_j \in E' \setminus F$. Ekkor a vegyes vágás szeparálja v_i-t és v_j-t, és a $v_i v_j$ él címkéje legalább $k + 1$. Így v_i és v_j F_k-nak ugyanabba a komponensébe esnek. Az élcímkézési lemma erős változata miatt $\kappa_{G'}(v_i, v_j) \geq k$ tehát G'-ben minden v_i-t és v_j-t szeparáló vegyes vágás legalább k méretű, hurrá.

Utolsó lépés: $|F|$ becslése. Ha v az F_i gyökere, akkor v izolált F_{i+1}-ben. Ezért $|F_1| \leq n - 1$, $|F_2| \leq n - 2, \ldots, |F_k| \leq n - k$, így $|F| \leq kn - \binom{k+1}{2}$. $\square$

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha U független, V klikk G-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha V elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha U független, V klikk G-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha V elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

Megf: (1) Minden splitgráf és intervallumgráf merevkörű.
(2) Merevkörű gráfból csúcsot törölve vagy abban élt összehúzva merevkörű gráfot kapunk. (Merevkörű gráf minorjai merevkörűek.)

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Megf: Ha G-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Megf: Ha G-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.

Biz: Legyen C a G egy legalább 4 élből álló köre, v pedig a C első csúcsa a szimpliciális sorrendben. A sorrend szimplicialitása miatt v-nek a C körön fekvő szomszédai össze vannak kötve egymással. Tehát C-nek van húrja, G csakugyan merevkörű.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Tétel: Ha G merevkörű, akkor G tetszőleges maxvissza sorrendjének megfordítása a G egy szimpliciális sorrendje.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Tétel: Ha G merevkörű, akkor G tetszőleges maxvissza sorrendjének megfordítása a G egy szimpliciális sorrendje.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ a G egy maxvissza sorrendje, legyen $i < n$-re $v_i v_n \in E(G)$. Megmutatjuk, hogy v_i szomszédos v_n minden v_i-t megelőző szomszédjával.

Merevkörű gráfok

Def: A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
G egy v csúcsa **szimpliciális**, ha v szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha v_i szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ i-re.

Tétel: Ha G merevkörű, akkor G tetszőleges maxvissza sorrendjének megfordítása a G egy szimpliciális sorrendje.

Biz: Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ a G egy maxvissza sorrendje, legyen $i < n$-re $v_i v_n \in E(G)$. Megmutatjuk, hogy v_i szomszédos v_n minden v_i-t megelőző szomszédjával. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n$ egy maxvissza sorrendje az ezen csúcsok által feszített G' merevkörű gráfnak. Az élcímkézési lemma erős változata miatt $\kappa_{G'}(v_n, v_i) = d_{G'}(v_n) = k$, azaz G'-ben vezet v_n és v_i között k bpd út. Húrmenti rövidítésekkel ezek az utak húrmentesnek választhatók. Minden ilyen út kört zár be $v_i v_n$-nel és mivel G' merevkörű, minden ilyen út kétélű. Így v_n minden v_i-t megelőző szomszédja szomszédos v_i-vel. A fordított maxvissza sorrend szimpliciális. $\square$

Merevkörű gráfok listaszínezése

Tétel: Ha G merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz G listaszínezési száma megegyezik G maximális klikkméretével.

Merevkörű gráfok listaszínezése

Tétel: Ha G merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz G listaszínezési száma megegyezik G maximális klikkméretével.

Köv: Ha G merevkörű, akkor

(1) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G) = \omega(G)$, így $\chi(G) = \omega(G)$.

(2) G minden f. részgráfja is merevkörű, így (1) miatt G perfekt.

Merevkörű gráfok listaszínezése

Tétel: Ha G merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz G listaszínezési száma megegyezik G maximális klikkméretével.

Köv: Ha G merevkörű, akkor
(1) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G) = \omega(G)$, így $\chi(G) = \omega(G)$.
(2) G minden f. részgráfja is merevkörű, így (1) miatt G perfekt.

Tétel biz: Az $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G)$ egyenlőtlenség triviális, ezért csak $\chi_\ell(G) \leq \omega(G)$ teljesüléség kell igazolni.
Legyenek megadva G minden csúcsához $\omega(G)$ méretű színlisták, és mohón színezünk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjében.
Mivel fordított szimpliciális sorrendben dolgozunk, tetsz v_i színezésekor a v_i már megszínezett szomszédai v_i-vel együtt egy legfejebb $\omega(G)$ méretű klikket alkotnak. Ezért a v_i listájában található $\omega(G)$ lehetséges színből legfeljebb $\omega(G) - 1$ színt használtunk fel a v_i korábban színezett szomszédaira, így aztán v_i-nek is tudunk jó színt választani. $\square$

Merevkörű gráfok előállítása

Tétel: A G pontosan akkor merevkörű, ha G csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas F fa bizonyos részfáinak, hogy G két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

Merevkörű gráfok előállítása

Tétel: A G pontosan akkor merevkörű, ha G csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas F fa bizonyos részfáinak, hogy G két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

Biz: Elégségesség.

Thf G előáll az F fa részfáinak metszetgráfjaként. Legyen r az F (tetsz. választott) gyökércsúcsa, és legyen minden F' részfa gyökere az F'-nek az F gyökeréhez legközelebbi csúcsa. Legyen C a G egy tetsz. köre, és legyen v a kör azon csúcsa, amelyiknek megfelelő F' részfa gyökere a lehető legtávolabb van r-től. Ekkor akkor v szomszédai a C körön szomszédosak egymással, tehát G merevkörű, az elégségességet igazoltuk.

Merevkörű gráfok előállítása

Tétel: A G pontosan akkor merevkörű, ha G csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas F fa bizonyos részfáinak, hogy G két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

Biz:

Merevkörű gráfok előállítása

Tétel: A G pontosan akkor merevkörű, ha G csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas F fa bizonyos részfáinak, hogy G két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

Biz: Szükségesség.
n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy az n csúcsú merevkörű gráfoknak van részfareprezentációja. Az $n = 1$ eset triviális. Legyen G n csúcsú merevkörű gráf, és tfh $n - 1$ csúcsra már igazoltuk a részfareprezentáció létezést. Legyen v a G egy szimpliciális csúcsa, és tekintsük a $G - v$ indukció miatt létező részfareprezentációját. Itt v szomszédai pként metsző részfáknak felelnek meg, ezért ezen részfáknak van egy közös csúcsa. (Konkrétan az r-től legtávolabbi gyökerű részfa gyökere.) Erről a közös csúcsról lelógatunk egy levelet, ezt hozzávesszük minden szóban forgó részfához, majd a v-hez tartozó részfa az egypontú levél lesz. Könnyen látható hogy így G egy részfareprezentációját kapjuk. $\square$

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.
- Merevkörű gráf listaszínezési és kromatikus száma megegyezik.

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.
- Merevkörű gráf listaszínezési és kromatikus száma megegyezik.
- Merevkörű gráfok = részfák metszetstruktúrái

Mit tanultunk ma?

- Az élcímkézési lemmában $E(G)$-t feszítőfákra partícionáljuk.
- A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kulcslemmája innen adódik.
- A $\leq k$ címkéjű élek a k-szoros élösszefüggőséget tanúsítják.
- Az élcímkézési lemma erősebb változata (vegyes vágásokkal).
- A legfeljebb k címkéjű élek a k-összefüggőséget is tanúsítják.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor G merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.
- Merevkörű gráf listaszínezési és kromatikus száma megegyezik.
- Merevkörű gráfok = részfák metszetstruktúrái

Jónapot