Gráfok és algoritmusok

4. előadás, Irving algoritmusa

2024. április 7.

Stabil párosítások nem páros gráfokon

Láttuk, hogy ha G tartalmazhat páratlan kört, akkor nem minden esetben van stabil párosítása. Természetes kérdés, hogy van-e olyan **hatékony** algoritmus, ami tetszőleges, preferenciákkal ellátott véges gráf input esetén vagy stabil párosítást talál, vagy igazolja, hogy nincs stabil párosítás.
Egyetlen eszközünk van, ami bizonyosan működik: az éltörlési lemma. Ha azonban ez már nem használható, akkor még lehet, hogy nagyon messze vagyunk a végső választól. Új eszközre van szükségünk, ami olyankor is működik, amikor az éltörlési lemma már nem segít.

Az éltörlés célja

Miért volt hasznos az éltörlési lemma? Azért, mert úgy tudtunk élt törölni, hogy stabil párosítás nem tűnt el és nem is keletkezett. Kiderül azonban, hogy ennél kevesebb is elég a sikerhez. Ha pl úgy sikerül élt törölni, hogy nem keletkezik új stabil párosítás, akkor csak az lehet a probléma, hogy az éltörlés nyomán **minden** stabil párosítás eltűnik. Azaz, ha olyan élt törlünk, amit minden stabil párosítás tartalmaz. Hát mi éppen ezt akarjuk elkerülni.

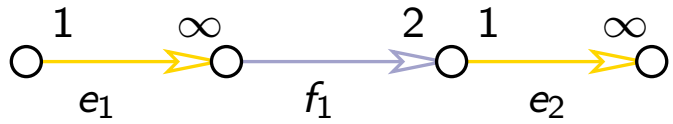
Az éltörlés célja

Miért volt hasznos az éltörlési lemma? Azért, mert úgy tudtunk élt törölni, hogy stabil párosítás nem tűnt el és nem is keletkezett. Kiderül azonban, hogy ennél kevesebb is elég a sikerhez. Ha pl úgy sikerül élt törölni, hogy nem keletkezik új stabil párosítás, akkor csak az lehet a probléma, hogy az éltörlés nyomán **minden** stabil párosítás eltűnik. Azaz, ha olyan élt törlünk, amit minden stabil párosítás tartalmaz. Hát mi éppen ezt akarjuk elkerülni.

Tfh a G gráfban az éltörlési lemma alapján nem lehet élt törölni. Ekkor ($e \prec_u$-legjobb) $\iff$ ($e \prec_v$-legrosszabb) $\forall e = uv \in E(G)$. Az ilyen e éleket irányítsuk u-ból v-be, és színezzük sárgára.

Cél: sárga élek törlése úgy, hogy ennek nyomán ne keletkezzen új stabil párosítás, továbbá, ha a törlések előtt volt stabil párosítás, akkor a törléseket legalább egy túléje.

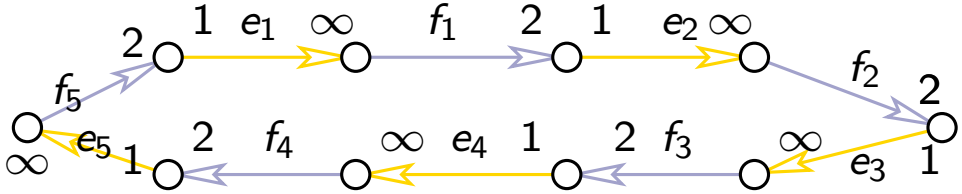
A második legjobb választás jelentése



Tfh a G gráfon nem végezhető éltörlés az éltörlési lemma alapján. Ekkor G minden komponense vagy izolált pont, vagy két csúcsból és egy élből áll, vagy olyan, amiben minden csúcs foka legalább 2. Az előbbiek triviálisak, mi az utóbbiakkal foglalkozunk.

Minden csúcs második legjobb élét irányítsuk befelé, és színezzük szürkére. Tfh e_1, f_1, e_2 egy sárga-szürke-sárga irányított út, M stabil párosítás és $e_1 \in M$. Ekkor $e_2 \in M$, különben f_1 blokkolna. Tanulság: a szürke élek implikációk. Ha egy stabil párosítás tartalmazza egy sárga-szürke-sárga irányított út első sárga élét, akkor tartalmazza a következő sárga élét is.

Rotációk

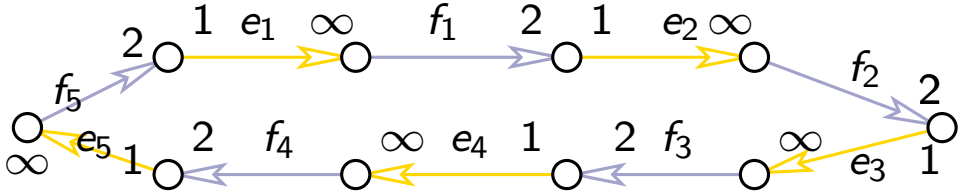


Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

Rotációk

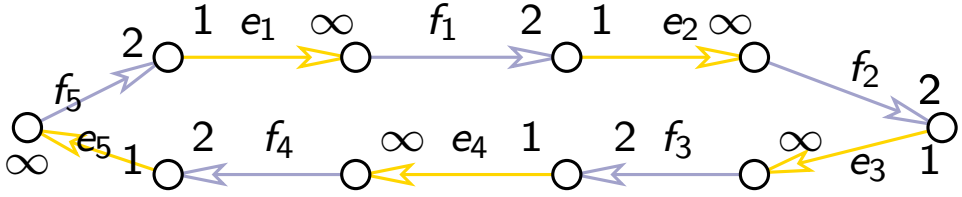


Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
   Biz: $e_i \in M \Rightarrow e_{i+1} \in M \Rightarrow \ldots \Rightarrow e_{i-1} \in M$.

Rotációk



Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

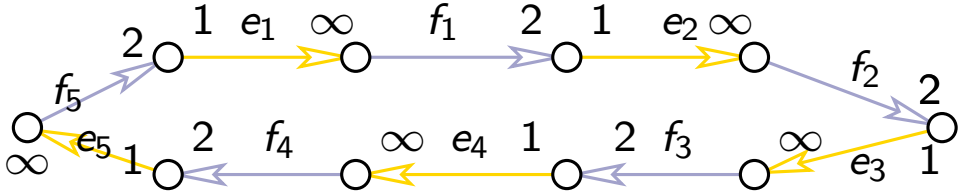
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

   Biz: $e_i \in M \Rightarrow e_{i+1} \in M \Rightarrow \ldots \Rightarrow e_{i-1} \in M$.

   Ha $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$, akkor $e_1, e_2, \ldots, e_k$ párosítás, és $f_1, f_2, \ldots, f_k$ is a G egy ugyanezen csúcsokat fedő párosítása. Így M' is párosítás, amit egyetlen e_i él sem blokkol. Ha egy g él blokkolná M'-t, akkor g blokkolná M-et is. Ám M-et semmi sem blokkolja, ezért M'-t sem. Tehát M' is stabil G-ben. □

Rotációk

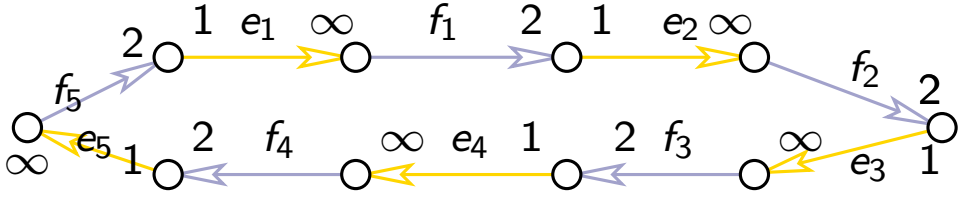


Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

Rotációk

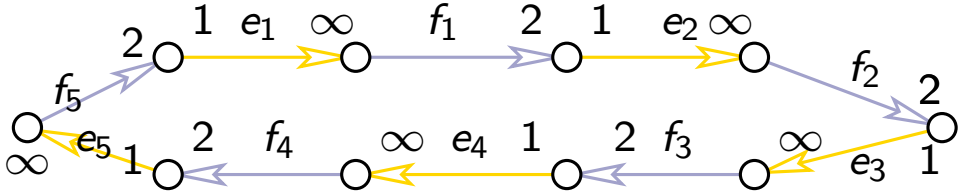


Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

Rotációk



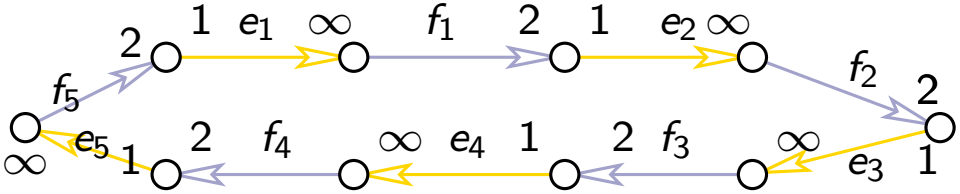
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

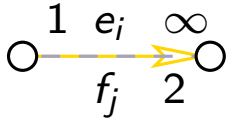
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





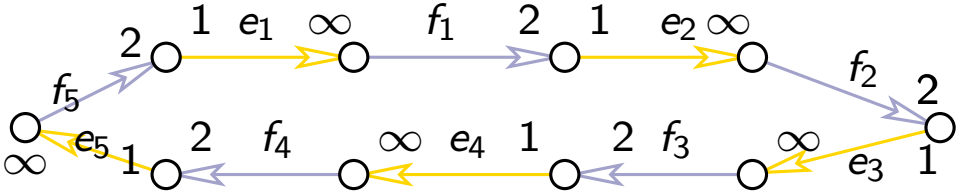
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

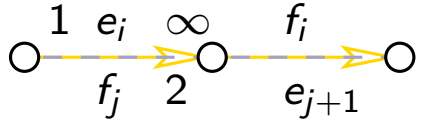
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





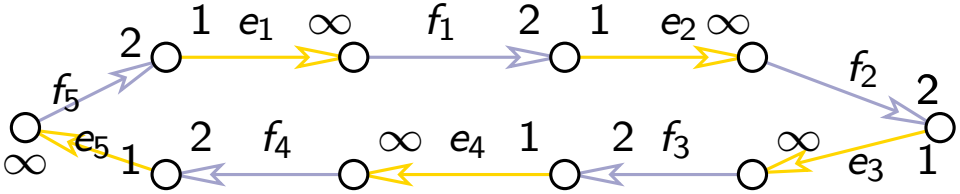
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

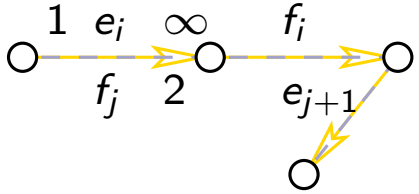
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





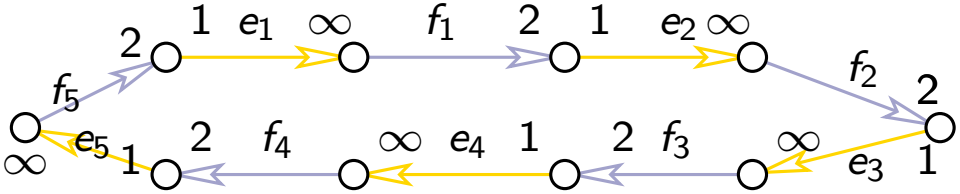
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

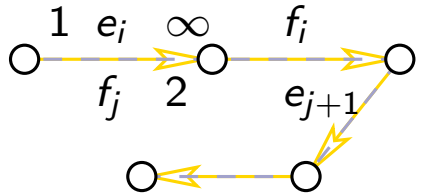
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





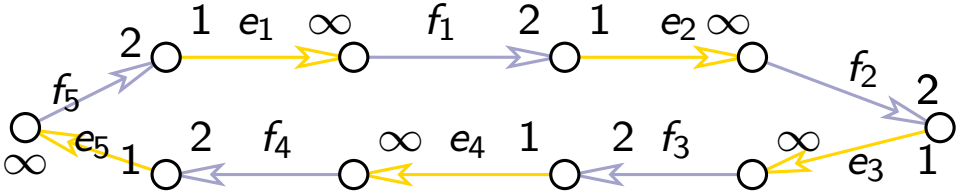
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

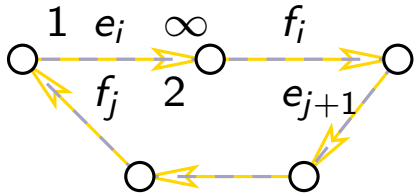
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





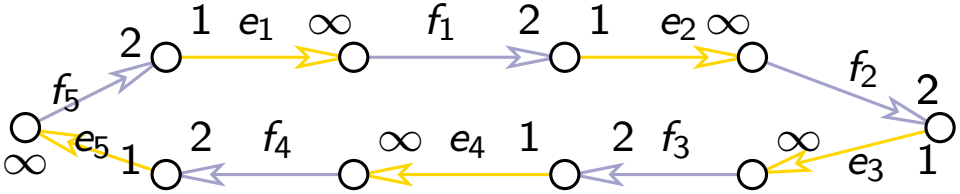
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

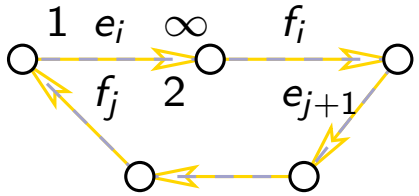
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

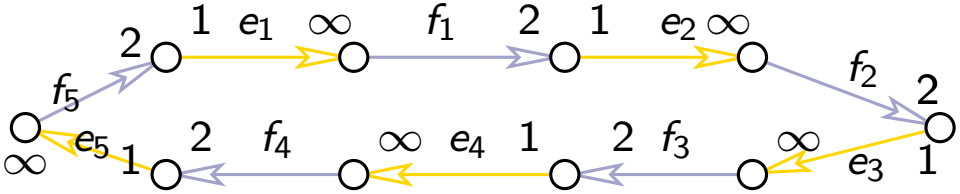
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

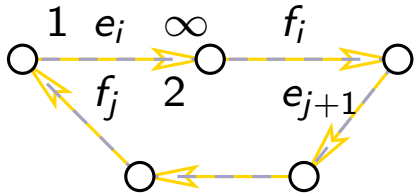
1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

   Ezért a sárga-szürke élek egy C kört alkotnak. Ez a C kör nem lehet páros hosszú. Ráadásul C minden csúcsa másodfokú G-ben, azaz C a G egy komponense. □

Rotációk



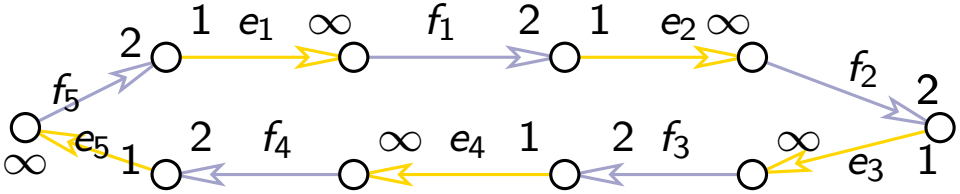


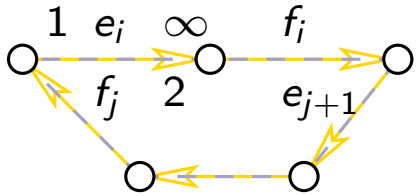
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.

Rotációk



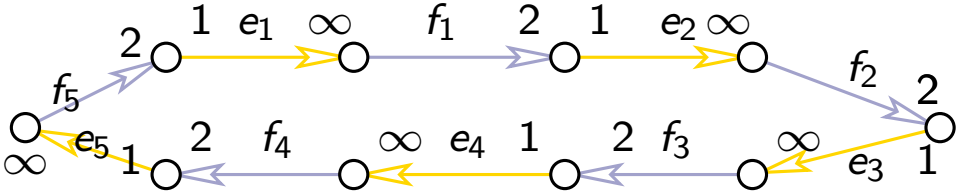


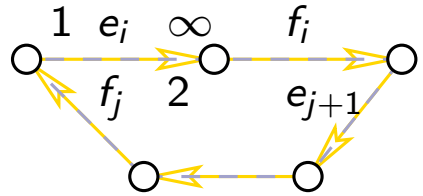
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Rotációk



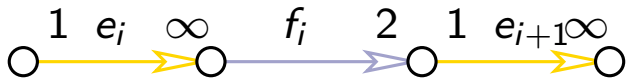


Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

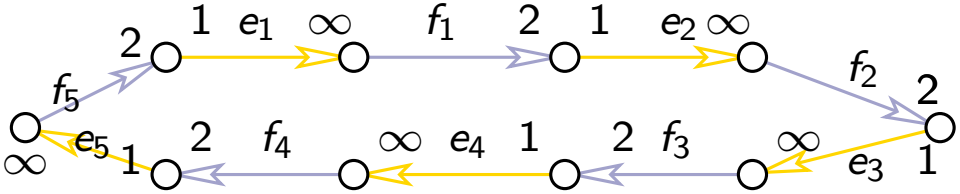
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

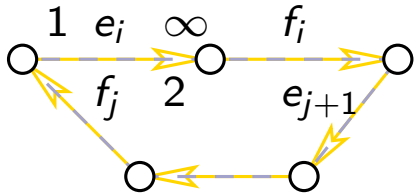
1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

   Biz: Ha e_i blokkol egy törlések utáni M párosítást, akkor $f_i \notin M$. Mivel $e_{i+1} \notin M$, ezért f_i is blokkolja M-et. □



Rotációk



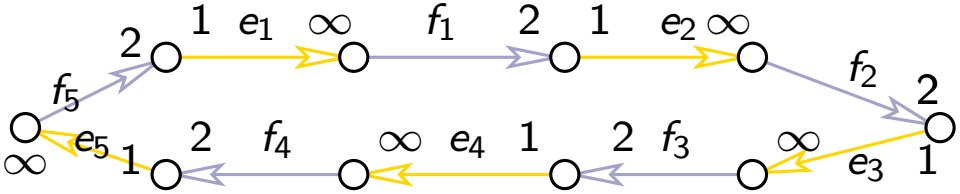


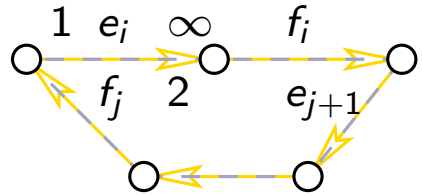
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Rotációk





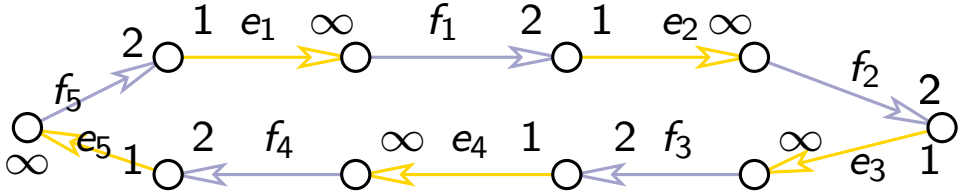
Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

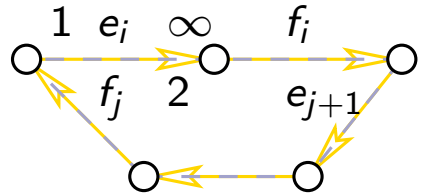
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Köv: Rotációban $\nexists$ sárga-szürke él $\Rightarrow$ sárga élek törölhetők: új stabil párosítás nem keletkezik, és ha törlünk is stabil párosítást, lesz olyan stabil párosítás, ami túléli a törlést. □

Rotációk





Def: $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők, és $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k, e_{k+1} = e_1$ egymáshoz csatlakozó, felváltva sárga és szürke irányított élek sorozata.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Köv: Rotációban $\nexists$ sárga-szürke él $\Rightarrow$ sárga élek törölhetők: új stabil párosítás nem keletkezik, és ha törlünk is stabil párosítást, lesz olyan stabil párosítás, ami túléli a törlést. □

Rotáció keresése: visszafelé követjük a sárga és szürke éleket, azaz felváltva legrosszabb és 2-dik legjobb élek mentén haladunk.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Megj: A fenti algoritmus felgyorsítható azzal, ha a rotáció eliminációjával együtt töröljuk az éltörlési lemma szerint törölhetővé vált éleket, és innentől csak a 2. lépést ismételjük. Így az 1. lépésre sosem térünk vissza.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓
2.2.1.: Ha volna G-nek stabil párosítása, akkor a rotációként kapott ptn pref.kör komponensnek is lenne.↯

Irving algoritmusa

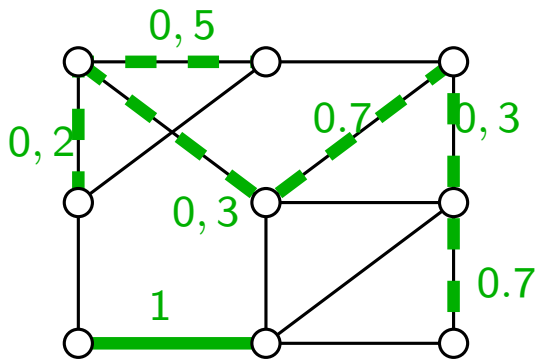
Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

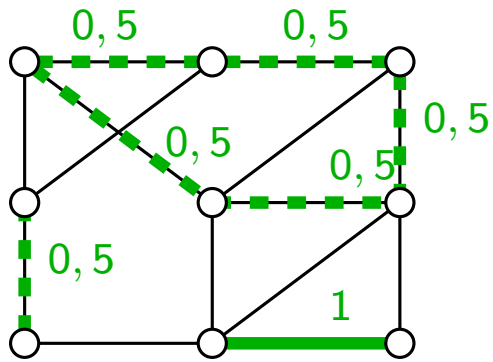
1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   - 2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   - 2.2 Van rotáció.
     - 2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
     - 2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Eliminálják a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓
2.2.1.: Ha volna G-nek stabil párosítása, akkor a rotációként kapott ptn pref.kör komponensnek is lenne.↯
2.2.2.: Következik az eddigiekből.✓

Tan karakterizációja

Def: A $G = (V, E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x : E \to \mathbb{R}_+$ függvény, amire $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
Félpárosítás alatt $x : E \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ törtpárosítást értünk.



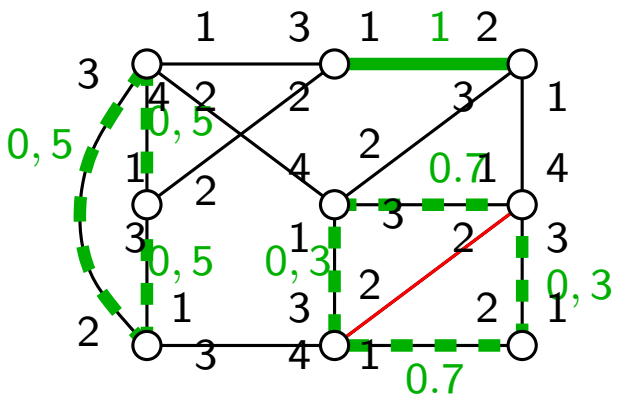


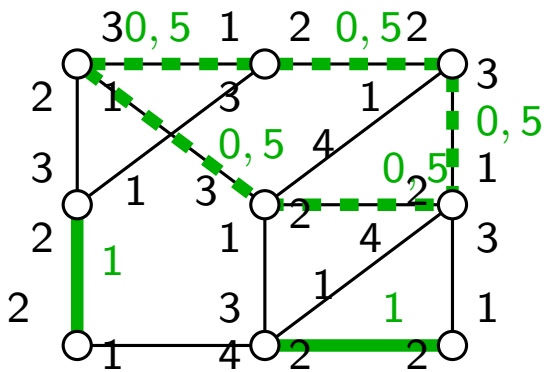
Tan karakterizációja

Def: A $G = (V, E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x : E \to \mathbb{R}_+$ függvény, amire $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
Félpárosítás alatt $x : E \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ törtpárosítást értünk.

Tan karakterizációja

Def: A $G = (V, E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x : E \to \mathbb{R}_+$ függvény, amire $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
Félpárosítás alatt $x : E \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ törtpárosítást értünk.
Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.





Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Tan 1. „biz”: Irving algoritmusát módosítjuk: nem állunk meg, ha a sárga-szürke ptn kör kompenst találunk. Ha már nem lehet rotációt eliminálni, akkor a sárga élek 1, a sárga-szürkék pedig $\frac{1}{2}$ súlyt kapnak. □

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha $x^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz páratlan kört.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha $x^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz páratlan kört.

Biz: $\Rightarrow$: Ha M stabil párosítás, akkor χ_M olyan stabil félpárosítás, amire $\chi_M^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz ptn kört. Tan tételének 2. része miatt $x^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz ptn kört semilyen x stabil félpárosításra.

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha $x^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz páratlan kört.

Biz:

Tan karakterizációja

Def: Az $x : E \to \mathbb{R}_+$ törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élhez van olyan v csúcs, amire $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil félpárosítás.

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak (gyak),
2. ha pedig nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, és $C \subseteq x_1^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan kör, akkor $C \subseteq x_2^{-1}(\frac{1}{2})$.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha $x^{-1}(\frac{1}{2})$ nem tartalmaz páratlan kört.

Biz: $\Leftarrow$: Ha x stabil félpárosítás, és $x^{-1}(\frac{1}{2})$-ben nincs ptn kör, akkor az $x^{-1}(\frac{1}{2})$-beli ps körök minden második élén a súlyt 1-re, minden ,,elsőn" pedig 0-ra módosítva egy $x' : E \to \{0, 1\}$ stabil félpárosítást kapunk. Ekkor $x' = \chi_M$, és M stabil párosítás.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú élek ptn körei mindig ugyanazok.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú élek ptn körei mindig ugyanazok.
- Tan tétele: Irving algoritmusa stabil félpárosítást talál, és kompakt bizonyítékot szolgáltat a stabil párosítás nemlétére.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú élek ptn körei mindig ugyanazok.
- Tan tétele: Irving algoritmusa stabil félpárosítást talál, és kompakt bizonyítékot szolgáltat a stabil párosítás nemlétére.

Ennyi az egész