Gráfok és algoritmusok

1. előadás, mohó technikák

2024. február 15.

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.
- Információforrás: kurzushonlap (`www.cs.bme.hu/grafalg`), Sürgős esetben neptunüzenet

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.
- Információforrás: kurzushonlap (`www.cs.bme.hu/grafalg`), Sürgős esetben neptunüzenet
- K 12:15-13:45 gyakorlat, Varga Kitti

(IB025, márciustól IB146)

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.
- Információforrás: kurzushonlap (`www.cs.bme.hu/grafalg`), Sürgős esetben neptunüzenet
- K 12:15-13:45 gyakorlat, Varga Kitti
  (IB025, márciustól IB146)
- ZH: máj. 16, előadás idejében
  pZH: máj. 23, előadás idejében.
  (90 perc, 5x10 p., 20 ponttól sikeres.)
  ZH előtti előadás és gyakorlat részben konzultáció.

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.
- Információforrás: kurzushonlap (`www.cs.bme.hu/grafalg`), Sürgős esetben neptunüzenet
- K 12:15-13:45 gyakorlat, Varga Kitti (IB025, márciustól IB146)
- ZH: máj. 16, előadás idejében
  pZH: máj. 23, előadás idejében.
  (90 perc, 5x10 p., 20 ponttól sikeres.)
  ZH előtti előadás és gyakorlat részben konzultáció.
- Szóbeli vizsga: tételsor, $S \leq$60p szerezhető. $S < 24$ esetén a vizsga sikertelen, különben a végső pontszám $V = S + 0,8 \cdot Z$.
  Osztályzatok ponthatárai: 2: 40, 3: 55, 4: 70, 5: 85.

Mi ez a kurzus?

- A cél néhány algoritmikusan is megközelíthető gráfelméleti probléma vizsgálata.
- Információforrás: kurzushonlap (`www.cs.bme.hu/grafalg`), Sürgős esetben neptunüzenet
- K 12:15-13:45 gyakorlat, Varga Kitti (IB025, márciustól IB146)
- ZH: máj. 16, előadás idejében
  pZH: máj. 23, előadás idejében.
  (90 perc, 5x10 p., 20 ponttól sikeres.)
  ZH előtti előadás és gyakorlat részben konzultáció.
- Szóbeli vizsga: tételsor, $S \leq$60p szerezhető. $S < 24$ esetén a vizsga sikertelen, különben a végső pontszám $V = S + 0,8 \cdot Z$.
  Osztályzatok ponthatárai: 2: 40, 3: 55, 4: 70, 5: 85.
- Segédanyagok
  Frank András jegyzetei (ld. kurzushonlap)
  gyakorlatok feladatsorai,
  előadás diasorok (kurzushonlapról letölthetők)

Ismétlés

- Gráfokkal kapcsolatos fogalmak
  - irányítatlan/irányított gráf,
  - (ki/be)fok (δ, ρ, d),
  - összefüggőség, komponens, többszörös összefüggőség ($\lambda(G), \kappa(G)$),
  - kör, vágás, fa, feszítőfa (ffa), feszítő erdő

Ismétlés

- Gráfokkal kapcsolatos fogalmak
  - irányítatlan/irányított gráf,
  - (ki/be)fok (δ, ρ, d),
  - összefüggőség, komponens, többszörös összefüggőség $(\lambda(G), \kappa(G))$,
  - kör, vágás, fa, feszítőfa (ffa), feszítő erdő
- Jelölések $G = (V, E)$ gráf esetén.
  - $I(X) = \{uv \in E : u, v \in X\}$ az $X \subseteq V$ által feszített (indukált) élek, $i(X) := |I(X)|$.
  - $E(X) = E \setminus I(V - X)$ az $X \subseteq V$ által lefogott élek, $e(X) := |E(X)|$.
  - $A \setminus B$ ill. $A \cup \{x\}$ helyett gyakran $A - B$-t ill. $A + x$-et írunk.
  - Ha $c : E \to \mathbb{R}$, akkor $F \subseteq E$ esetén $\tilde{c}(F) := \sum\{c(f) : f \in F\}$ az összegfv.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Megf: A G_i bmely $F_i \subseteq E_i$ feszítő erdeje kiegészíthető a G_{i+1}-nek egy F_{i+1} feszítő erdejévé. A G_1 feszítő erdejéből kiindulva megkapható így a $G = G_\ell$ egy F feszítőfája.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Megf: A G_i bmely $F_i \subseteq E_i$ feszítő erdeje kiegészíthető a G_{i+1}-nek egy F_{i+1} feszítő erdejévé. A G_1 feszítő erdejéből kiindulva megkapható így a $G = G_\ell$ egy F feszítőfája.

Azt fogjuk belátni, hogy G mkffái pontosan a megfigyelésbeli feszítőfák.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Biz: $\Rightarrow$: Tfh F mkffa, és F nem tartalmazza G_i feszítő erdejét. Ekkor $F \cap E_i$-hez hozzávehetünk egy E_i-beli e élt úgy, hogy $e + F \cap E_i$ körmentes maradjon. Az $F + e$ gráf pontosan egy kört tartalmaz, és ennek a körnek biztosan van egy E_i-hez nem tartozó (tehát e-nél drágább) f éle. Ekkor $F - f + e$ egy F-nél olcsóbb feszítőfa, ami ellentmond annak, hogy F mkffa.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Biz:

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Biz: $\Leftarrow$: Tfh $F \cap E_i$ a G_i feszítő erdeje $\forall i$. Legyen F' tetsz. feszítőfa és $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$ ill. $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-1}\}$, ahol $c(f_1) \leq c(f_2) \leq \ldots \leq c(f_{n-1})$ ill. $c(f'_1) \leq c(f'_2) \leq \ldots \leq c(f'_{n-1})$. Indirekt tfh $c(f_j) > c(f'_j) = c_i$ valamelyik j-re. Ekkor $|F \cap E_i| < j \leq |F' \cap E_i|$, ami ellentmondás, hisz $F \cap E_i$ a G_i egy feszítő erdeje. Ezért $c(f_j) \leq c(f'_j)$ teljesül $\forall 1 \leq j \leq n-1$, tehát $\tilde{c}(F) = \sum_{i=1}^{n-1} c(f_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} c(f'_i) = \tilde{c}(F')$, így F csakugyan mkffa. $\square$

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Minimális költségű feszítőfák struktúrája

Def: Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ ktg fv esetén $F \subseteq E$ **mkffa**, ha (V, F) a G ffája és bmely (V, F') ffára $\tilde{c}(F) \leq \tilde{c}(F')$.

Tfh G öf. A mkffák struktúráját vizsgáljuk. Tfh $c(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ ahol $c_1 < c_2 < \ldots < c_\ell$ és legyen $E_i := \{e \in E : c(e) \leq c_i\}$, $G_i = (V, E_i)$.

Tétel: A G gráf F feszítőfája pontosan akkor mkkfa, ha minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén F tartalmazza a G_i egy feszítő erdejét.

Köv: (F a G mkffája) $\iff$ (minden c esetén teljesül, hogy F legfeljebb c költségű élei a G gráf legfeljebb c költségű éleiből álló G_c részgráfjának egy feszítő erdejét alkotják).

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.

Minimális költségű feszítőfák keresése

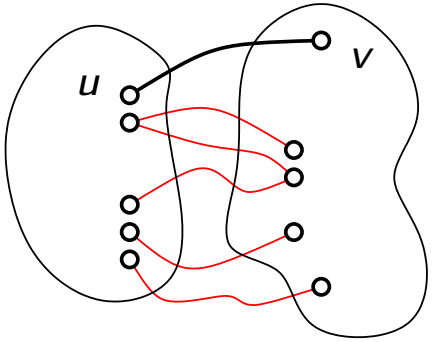
Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.

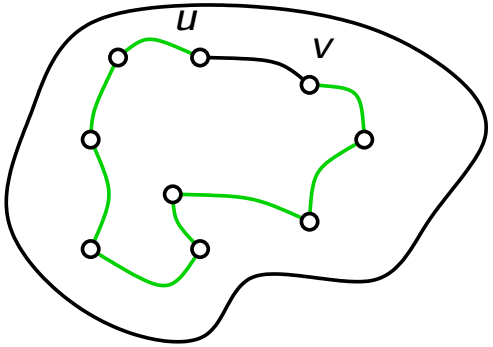
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)

Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)

Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.

B: Ha uv pirosra festése piros vágást hoz létre, akkor a színezés előtt bmely uv-t tartalmazó körnek volt piros éle.↯
Ha uv zöldre festése zöld kört hoz létre, akkor e színezés előtt minden uv-t tartalmazó vágásnak volt zöld éle.↯ □





Minimális költségű feszítőfák keresése

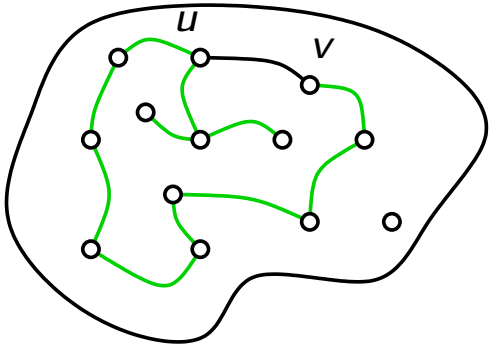
Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.

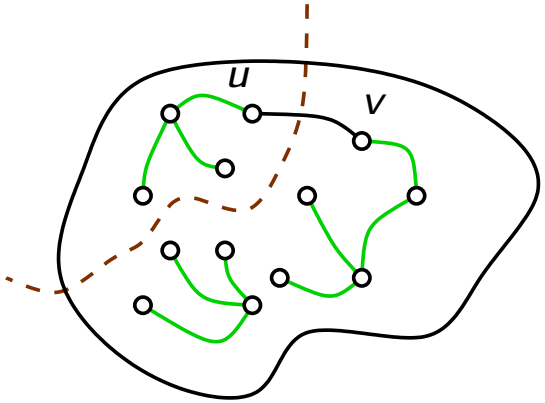
Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
B: Ha uv fehér és van zöld uv-út, akkor a piros szabály alkalmazható, ha nincs ilyen út, akkor a zöld szabály. □





Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.

Minimális költségű feszítőfák keresése

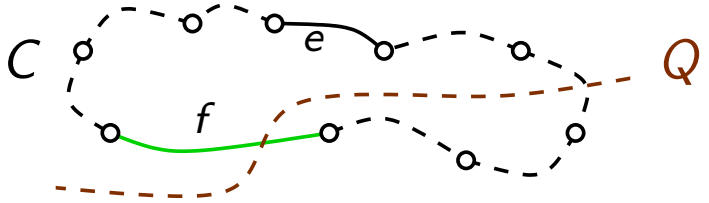
Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.

Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)

Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)

Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.

B: Ha C-nek nincs zöld éle, világos. Különben legyen f a C legdrágább zöld élei közül az utolsónak kiszínezett, mondjuk $Z(Q) = f$. Ekkor $|C \cap Q| \geq 2$ miatt C-nek van f-nél nem olcsóbb fehér éle, tehát $c(e) \geq c(f)$. □



Minimális költségű feszítőfák keresése

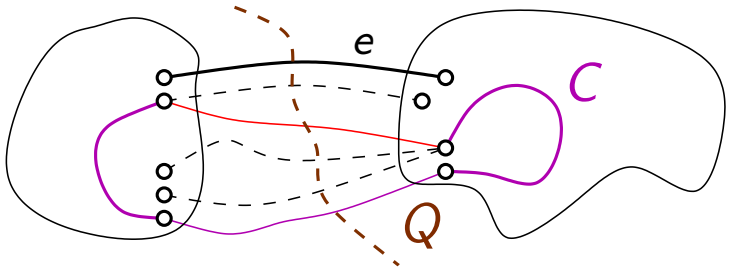
Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
B: Ha Q-nak nincs piros éle, világos. Különben legyen f a Q legolcsóbb piros élei közül az utolsónak kiszínezett, mondjuk $P(C) = f$. Ekkor $|C \cap Q| \geq 2$ miatt Q-nak van f-nél nem drágább fehér éle, tehát $c(e) \leq c(f)$. $\square$



Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.
B: A zöld élek Z halmaza körmentes gráfot alkot, és mivel nincs piros vágás, ezért a (V, Z) öf is, azaz ffa. Ha Z nem mkffa, akkor valamelyik G_i-nek nem tartalmazza feszítő erdejét a mkffa korábbbi jellemzése miatt. Ezért G_i-nek van egy Q piros vágása. Legyen $P(C) = uv$ ezen vágás utolsónak pirosra festett éle. (3) miatt $C \subseteq E_i$, így $|Q \cap C| \geq 2$ miatt C-nek volt piros éle.↯ $\square$

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.
Köv: A mohó algoritmus helyessége.
Mohó algoritmus: $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $c(e_1) \leq \ldots \leq c(e_m)$.
$F_0 = \emptyset$, és $F_{i+1} = F_i$ ha $F_i + e_{i+1}$ tartalmaz kört, egyébként $F_{i+1} = F_i + e_{i+1}$. Output: F_m.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.
Köv: A mohó algoritmus helyessége.
Mohó algoritmus: $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $c(e_1) \leq \ldots \leq c(e_m)$.
$F_0 = \emptyset$, és $F_{i+1} = F_i$ ha $F_i + e_{i+1}$ tartalmaz kört, egyébként $F_{i+1} = F_i + e_{i+1}$. Output: F_m.
Megf: Ha $F_{i+1} = F_i + e_{i+1}$, akkor e_{i+1} az F_i egyik komponenséből kilépő legolcsóbb él, így a zöld szabály szerint zöldre festhető. $\square$

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.
Köv: A mohó algoritmus helyessége.

Minimális költségű feszítőfák keresése

Egy mkffa kereséséhez G éleit 3 színnel (p,f,z) színezzük.
Eredetileg minden él fehér.
Piros szabály: Ha egy C körnek nincs piros éle, akkor C egyik legdrágább fehér élét (e-t) pirosra színezzük. (Jel: $P(C) = e$.)
Zöld szabály: Ha egy Q vágásban nincs zöld él, akkor Q egyik legolcsóbb fehér élét (e-t) zöldre színezzük. (Jel: $Z(Q) = e$.)
Megf: (1) Nem jön létre se piros vágás, se zöld kör.
(2) Amíg van fehér él, alkalmazható valamelyik szabály.
(3) Ha $P(C) = e$, akkor e a C egyik legdrágább éle.
(4) Ha $Z(Q) = e$, akkor e a Q egyik legolcsóbb éle.
(5) Ha már nincs fehér él, akkor a zöld élek mkffát alkotnak.
Köv: A mohó algoritmus helyessége.
Köv: Az óvatos (csak a piros szabályt alkalmazó), Borůvka, Prim algoritmusok helyessége.

Részfapakolások

Dirac tétele: Adott az F fa részfáinak $\mathcal{F}$ rendszere. Jelölje ν az $\mathcal{F}$-beli páronként diszjunkt fák maximális számát, τ pedig az $\mathcal{F}$ elemeit lefogó csúcsok minimális számát. Ekkor $\nu = \tau$.

Részfapakolások

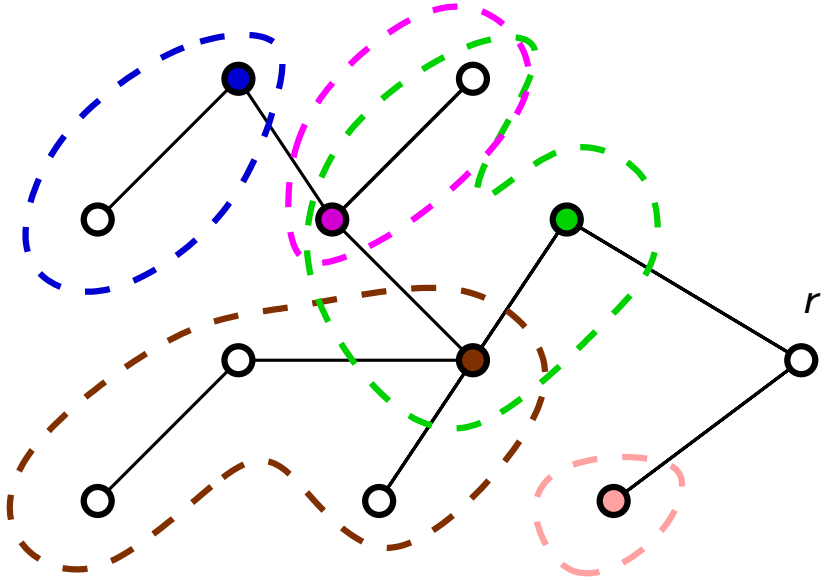
Dirac tétele: Adott az F fa részfáinak $\mathcal{F}$ rendszere. Jelölje ν az $\mathcal{F}$-beli páronként diszjunkt fák maximális számát, τ pedig az $\mathcal{F}$ elemeit lefogó csúcsok minimális számát. Ekkor $\nu = \tau$.

Biz: Világos, hogy $\tau \geq \nu$. Legyen r az F talppontja, és $\mathcal{F}$ minden F részfájának talppontja az F r-hez legközelebbi csúcsa. Az $\mathcal{F}$ elemein a talppontjaik r-től való távolságának csökkenő (pontosabban nemnövekvő) sorrendjében végighaladva mohón választott diszjunkt részfák talppontjai lefogják $\mathcal{F}$ minden részfáját. Ezért $\nu \geq \tau$, így a korábbi $\tau \geq \nu$ miatt $\nu = \tau$. $\square$

Részfapakolások

Dirac tétele: Adott az F fa részfáinak $\mathcal{F}$ rendszere. Jelölje ν az $\mathcal{F}$-beli páronként diszjunkt fák maximális számát, τ pedig az $\mathcal{F}$ elemeit lefogó csúcsok minimális számát. Ekkor $\nu = \tau$.

Biz: Világos, hogy $\tau \geq \nu$. Legyen r az F talppontja, és $\mathcal{F}$ minden F részfájának talppontja az F r-hez legközelebbi csúcsa. Az $\mathcal{F}$ elemein a talppontjaik r-től való távolságának csökkenő (pontosabban nemnövekvő) sorrendjében végighaladva mohón választott diszjunkt részfák talppontjai lefogják $\mathcal{F}$ minden részfáját. Ezért $\nu \geq \tau$, így a korábbi $\tau \geq \nu$ miatt $\nu = \tau$. $\square$



Fokszámkorlátos irányítások

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ és $f : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát. Ekkor pontosan akkor létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\rho(v) \geq f(v)$ teljesül minden $v \in V$-re, ha $\tilde{f}(X) \leq e(X)$ teljesül minden $X \subset V$ esetén.

Fokszámkorlátos irányítások

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ és $f : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát. Ekkor pontosan akkor létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\rho(v) \geq f(v)$ teljesül minden $v \in V$-re, ha $\tilde{f}(X) \leq e(X)$ teljesül minden $X \subset V$ esetén.

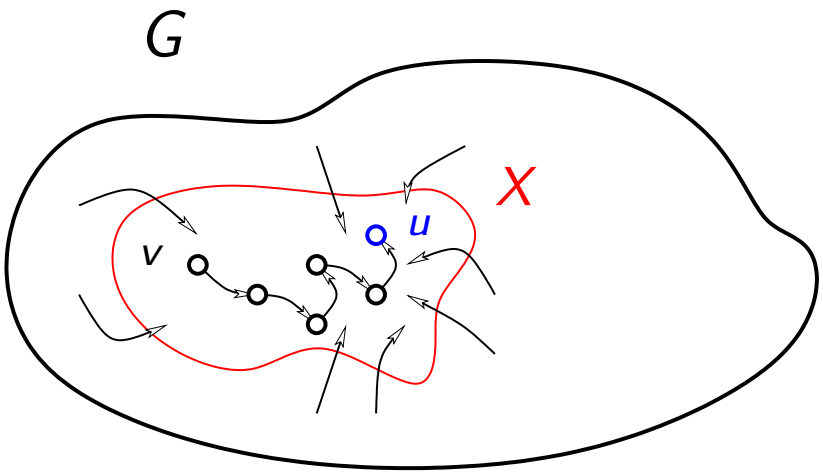
Biz: $\Rightarrow$: $\tilde{f}(X) \leq \tilde{\rho}(X) \leq e(X)$.

Fokszámkorlátos irányítások

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ és $f : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát. Ekkor pontosan akkor létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\rho(v) \geq f(v)$ teljesül minden $v \in V$-re, ha $\tilde{f}(X) \leq e(X)$ teljesül minden $X \subset V$ esetén.

Biz: $\Rightarrow$: $\tilde{f}(X) \leq \tilde{\rho}(X) \leq e(X)$.

$\Leftarrow$: Tetszőleges irányítás esetén v *hibája* $\max(0, f(v) - \rho(v))$. Ha egy irányítás összhibája 0, akkor az megfelel. Ha pedig az összhiba pozitív, akkor ezt egy irányított út megfordításával csökkentjük. Tfh v hibás, azaz $\rho(v) < f(v)$. Legyen $X := \{v$-ből irányított úton elérhető csúcsok$\}$. Ekkor $\tilde{\rho}(X) = e(X) \geq \tilde{f}(X)$, ezért van olyan $u \in X$, amire $f(u) < \rho(u)$. Egy vu-út megfordításával az összhiba csökken. $\square$



Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése

Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése
- Piros és zöld szabályok mkffát találnak

Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése
- Piros és zöld szabályok mkffát találnak
- Mkffát kereső algoritmusok helyessége

Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése
- Piros és zöld szabályok mkffát találnak
- Mkffát kereső algoritmusok helyessége
- Optimális részfapakolások és lefogások mohó keresése

Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése
- Piros és zöld szabályok mkffát találnak
- Mkffát kereső algoritmusok helyessége
- Optimális részfapakolások és lefogások mohó keresése
- Optimális fokszámkorlátos irányítás lokális javítással

Mit tanultunk ma?

- Mkffák jellemzése
- Piros és zöld szabályok mkffát találnak
- Mkffát kereső algoritmusok helyessége
- Optimális részfapakolások és lefogások mohó keresése
- Optimális fokszámkorlátos irányítás lokális javítással

Köszönöm a figyelmet!