

Gráfok és algoritmusok

ZH javítókulcs (2019. 05. 06.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ill. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a G teljes páros gráf színosztályai és minden $1 \leq i \leq n$ ill. $1 \leq j < k \leq n$ esetén $v_i u_j \leq_{v_i} v_i u_k$ teljesül. (Azaz a V színosztály csúcsainak preferenciái az U színosztályon ugyanazt a rendezést adják.) Hány stabil párosítása van G -nek?

Mivel páros gráfról van szó, létezik G -nek legalább egy stabil párosítása. (1 pont)

Ha lenne két különböző is, akkor az órán tanultak szerint a két párosítás szimmetrikus különbsége tartalmazna egy alternáló kört, ami mentén haladva mindig egyre jobb élek következnek az adott csúcs preferenciája szerint. (4 pont)

Ekkor azonban a körben szereplő u_i csúcsok indexeinek az adott körüljárás mentén szigorúan csökkennie kell, (4 pont)

ami lehetetlen, így pontosan egy stabil párosítás van a szóban forgó gráfban. (1 pont)

Avagy:

Pontosan egyetlen ilyen stabil párosítás létezik, és ezt n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ eset triviális. (1 pont)

Tegyük fel, hogy n -nél kisebb értékekre már igazoltuk az állítást, és a feladatban leírt gráfot vizsgáljuk. Minden v_i csúcs számára a $v_i u_1$ él a legjobb, ezért az órán tanult lemma szerint a stabil párosítások halmazának megváltoztatása nélkül törölhető minden olyan $u_1 v_i$ él, amely u_1 számára nem a legjobb. (3 pont)

Ha –mondjuk– u_1 számára legjobb az $u_1 v_1$ él, akkor ugyancsak a lemma miatt úgy törölhetők az v_1 -ből induló további élek, hogy ez megintcsak nem változtat a stabil párosítások halmazán. (3 pont)

Ezek után az $u_1 v_1$ él a gráfunk egy komponense lesz, a maradék gráf pedig egy olyan $K_{n-1, n-1}$, amelyre indukció miatt tudjuk, hogy pontosan egy stabil párosítása van. (2 pont)

Ezek szerint a kiindulási gráfunknak is pontosan egy stabil párosítása lesz, ez pedig az indukciós lépést igazolja. (1 pont)

Avagy:

Az órán volt, hogy páros gráfban mindig van stabil párosítás. (1 pont)

Az órán azt is tanították, hogy két különböző stabil párosítás esetén ha minden fiú a két párosításból a számára jobbik élt választja, akkor újabb stabil párosítást kapunk, amely ugyanazt a halmazt fedi. (3 pont)

Ha a fiúk a V halmazt alkotják, akkor két különböző stabil párosítás esetén a fenti konstrukcióval nem kaphatunk párosítást (nemhogy stabilit), hiszen lesz olyan lány, akit két fiú is választani fog. (5 pont)

Ezért pontosan egy stabil párosítása van a feladatban leírt gráfnak. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy $2 \cdot \Delta(G)$ színből álló L_e színlista. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható két szín az L_e színlistából úgy, hogy közös csúccsal rendelkező élekhez ne válasszunk azonos színt.

Az órán tanították Galvin tételét, amely szerint tetszőleges páros gráf él-listaszínezési száma megegyezik a maximális fokszámmal. (3 pont)

Helyettesítsük G minden e élet két párhuzamos éllel az adott végpontok között, és tartozzon minden ilyen újonnan bevezetett élhez ugyanaz a színlista, ami e -hez tartozott. (3 pont)

Az így kapott G' gráfban a maximális fokszám éppen $2 \cdot \Delta(G)$ lesz, így Galvin tétele miatt él-listaszínezhető a megadott színlistákból. (3 pont)

Ez a színezés voltaképp az eredeti gráf minden e éléhez pontosan két színt rendel úgy, hogy közös csúccsal rendelkező élekhez rendelt színek között nincs közös. Ezért a feladatban leírt tulajdonságú színválasztás valóban végrehajtható. (1 pont)

3. Legyenek a G gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_n$ valamint $v_1, v_2, \dots, v_n$ élei pedig $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{n-1}v_{n-1}$ valamint minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén fusson él u_i és u_j ill. v_i és v_j között. Lehet-e u_1 és v_1 (valamilyen sorrendben) a G csúcsainak alkalmas maxvissza sorrendjében az utolsó két csúcs?

Az órán olyat tanítottak, hogy ha x és y egy maxvissza sorrendben az utolsó két csúcs, akkor $\lambda(x, y) = d(y)$ teljesül. (3 pont)

Ezért $d(u_1) = d(v_1) = n$ miatt (1 pont)

ha u_1 és v_1 lenne az utolsó két csúcs egy maxvissza sorrendben, akkor $\lambda(u_1, v_1) = n$ teljesülne. (2 pont)

Tekintettel azonban arra, hogy az $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{n-1}v_{n-1}$ élek egy $n - 1$ élből álló olyan vágást alkotnak, amely szeparálja u_1 -et v_1 -től, (2 pont)

$\lambda(u_1, v_1) \leq n - 1$ teljesül. (1 pont)

Ezek szerint nincs olyan maxvissza sorrendje a G csúcsainak, amelyben az utolsó két csúcs u_1 és v_1 . (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G gráf bármely két különböző u, v csúcsára $\lambda(u, v) = 42$ teljesül. Hogyan kapható meg a G minimális vágásait leíró kaktuszból a G gráf egy Gomory-Hu fája?

A GH-fának minden csúcspárra kell reprezentálnia egy-egy minimális vágást, ami a feladatbeli feltevés miatt pontosan 42 nagyságú. (2 pont)

Ezért a cél az, hogy olyan fát találjunk a G gráf csúcshalmazán, amelynek bármely élet elhagyva a fa két keletkező komponense kaktuszvágásként is megkapható. (2 pont)

Ha a kaktusz minden köréből elhagyunk egy-egy élt, akkor egy olyan F' fa marad, aminek bármely élet elhagyva a két keletkező komponens a G egy minimális vágását határozza meg. (2 pont)

Mivel a kaktusz minden csúcspárra reprezentálja összes minimális vágást, ezért a kaktusz minden csúcsa a G gráf egyetlen csúcsainak vagy az üreshalmaznak felel meg. (2 pont)

Induljunk ki az F' fából. Ha egy élének valamelyik végpontja az üreshalmaznak felel meg, akkor azt az élt húzzuk össze, majd innen folytassuk ugyanezt az eljárást. (1 pont)

Ha már nem lehet ilyen módon további élt összehúzni, akkor pontosan egy fenti tulajdonságokkal rendelkező fát kaptunk, ami tehát G egy Gomory-Hu fája. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, ötödfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van olyan ux és vy éle, amelyre az ezen élek törlésével és egy xy él behúzásával létrejövő $G - ux - vy + xy$ gráf 4-szeresen élösszefüggő.

Egy uv él behúzásával az előálló $G + uv$ gráf szintén 4-szeresen élösszefüggő, (1 pont)

ráadásul $d(u) = d(v) = 6$, ami páros. (1 pont)

Lovász órán tanult leemelési tétele miatt az u és a v csúcs is teljesen leemelhető (mondjuk ebben a sorrendben). Az így kapott G' gráf a leemelési tétel miatt 4-szeresen élösszefüggő marad. (3 pont)

Legyen ux az az él, amivel az uv élt emeltük le az u teljes leemelésekor, vy pedig az az él, amivel az imént létrejött ux élt emeltük le a v teljes leemelésekor. (1 pont)

Ha most az u teljes leemelésekor kapott vx -től különböző két élt, valamint a v teljes leemelésekor kapott xy -től különböző két élt összeépítjük, akkor az órán tanultak miatt továbbra is 4-szeresen élösszefüggő gráfot kapunk. (3 pont)

Az így kapott gráf pedig a konstrukció folytán izomorf a feladatban szereplő $G - ux - vy + xy$ gráffal, ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

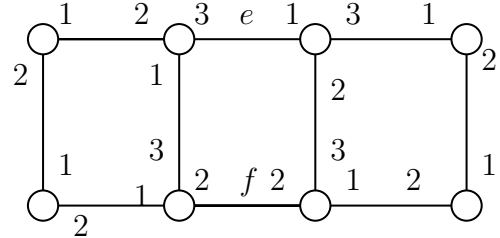
Gráfok és algoritmusok

ZH javítókulcs (2019. 05. 06.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Változik-e attól a stabil párosítások száma, ha az ábrán látható gráfból töröljük (a) az e illetve (b) az f élt?



Az e törlésétől nem változik a stabil párosítások halmaza, ugyanis az órán tanult kulcslemma miatt az e él törölhető a bal felső vízszintes él miatt. (5 pont)

Ha viszont az f élt töröljük, akkor a függőleges élekből álló, eredetileg nem stabil párosítás stabillá válik. Tehát f törlésekor változik a stabil párosítások halmaza. (5 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy $k(e)$ pozitív egész érték és egy legalább K színből álló L_e színlista, ahol $K = \max_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(v)} k(e)$. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható $k(e)$ db szín az L_e színlistából úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező élekhez csupa különböző színt válasszunk.

Az órán tanították Galvin tételét, amely szerint tetszőleges páros gráf él-listaszínezési száma megegyezik a maximális fokszámmal. (3 pont)

Helyettesítsük G minden e élet $k(e)$ párhuzamos éllel az adott végpontok között, és tartozzon minden ilyen újonnan bevezetett élhez ugyanaz a színlista, mint ami e -hez tartozott. (3 pont)

Az így kapott G' gráfban a maximális fokszám éppen a feladatban definiált K érték lesz, így Galvin tétele miatt él-listaszínezhető a megadott színlistákból. (3 pont)

Ez a színezés voltaképp az eredeti gráf minden e éléhez pontosan $k(e)$ színt rendel, mégpedig úgy, hogy közös csúccsal rendelkező élekhez rendelt színek között nincs közös. Ezért a feladatban leírt tulajdonságú színválasztás valóban elvégezhető. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy ha $\lambda(u, v) = d(v)$ teljesül a G egyszerű gráf két különböző u és v csúcsára, akkor a v csúcs bizonyosan a v_1 vagy v_2 csúcs valamelyike. Bizonyítsuk be, hogy ha $|V(G)| > 2$, akkor v_1 és v_2 nem szomszédosak G -ben.

A maxvissza sorrendben a két utolsó csúcs mindig rendelkezik a feladatban megfogalmazott tulajdonsággal, ezért a feladat feltételéből az következik, hogy G bármely maxvissza sorrendjében v_1 vagy v_2 az utolsó csúcs. (3 pont)

Ha v_1 és v_2 szomszédosak lennének, akkor egy maxvissza sorrend kezdődhetne e két csúccsal, azonban ekkor $|V| > 2$ miatt egy harmadik csúcs lenne a sorrend utolsó eleme. Ez ellentmondás, tehát a két csúcs nem szomszédos. (2 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy minden véges, irányítatlan G gráfnak vannak olyan u és v különböző csúcsai, hogy a $G' = G + uv$ gráfra $\lambda_{G'}(x, y) = \lambda_G(x, y)$ teljesül minden olyan esetben amikor $\{x, y\} \neq \{u, v\}$.

Tekintsük G egy F Gomory-Hu fáját és legyen uv a Gomory-Hu fának egy olyan éle, ami G -ben egy legnagyobb vágást határoz meg. (4 pont)

Ekkor F a $G + uv$ gráfnak is Gomory-Hu fája lesz azzal a változtatással, hogy F uv éle eggyel nagyobb kapacitású vágást reprezentál, (2 pont)

ugyanis a GH fa által reprezentált minden más vágás érintetlen marad, és az új él behúzásától az élössze-függőség nem csökkenhetett. (2 pont)

Mivel tetszőleges két csúcs közti összefüggőséget a GH fának a két csúcsot összekötő útján a minimális érték reprezentálja, ezért az uv él behúzásával kizárólag e két csúcs összefüggősége növekedett. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolni. (2 pont)

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen összefüggő G gráfnak u, v és w páronként nem szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy található e csúcsoknak két-két szomszédja úgy, hogy a $G - uu_1 - uu_2 - vv_1 - vv_2 - ww_1 - ww_2 + uw_1 + uw_2 + vu_1 + vu_2 + wv_1 + wv_2$ gráf 4-összefüggő marad. (6 élt törölünk, és 6-ot húzunk be.)

Lovász órán tanult leemelési tétele alkalmazható, hiszen $\lambda(G) \geq 4 \geq 2$, és u, v ill. w fokszáma páros. Ezért az u, v és w teljes leemelésekor a kapott G' gráf továbbra is 4-szeresen összefüggő marad. (4 pont)

A G gráf tehát úgy jön létre, hogy a $G - u - v - w$ gráfba behúzunk még kilenc élt: 3-at az u , 3-at a v , és 3-at a w szomszédai között. (1 pont)

E kilenc élből hármat-hármat alkalmas módon összeépítve pontosan olyan gráfot kapunk, amelyet a feladat előír. (2 pont)

A $2k$ -élő gráfok előállításáról tanult tétel miatt három él összeépítése megőrzi a 4-szoros összefüggőséget, így a fent megkapott gráf valóban 4-szeresen élőf lesz, amint a feladat állította. (3 pont)

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2020. 05. 22.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G páros gráfnak $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ az egyik színosztálya, továbbá ha G két élére $ba_i \prec_b ba_j$ teljesül, akkor $i < j$. Bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan egy stabil párosítása van.

Az órán tanult Gale-Shapley-tétel szerint G -nek (mivel páros gráf) van teljes párosítása. (1 pont)

Ha G -nek volna két különböző stabil párosítása, akkor azok szimmetrikus különbsége nemüres, így az órán tanultak szerint bármelyik komponense egy olyan páros hosszúságú kör, amin körbe tudunk haladni mindig a jobbik élen továbbhaladva. (3 pont)

Legyen a_i egy ilyen C körnek a legkisebb indexű eleme az A színosztályból. Ekkor az a_i mindkét szomszédja a_i -t preferálja a szomszédai közül, ami ellentmond a preferenciák ciklikus voltának (5 pont)

Ezért nem létezhet ilyen C preferenciakör, azaz G bármely két stabil párosítása megegyezik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

Avagy.

Legyen a_1b_1 az a_1 számára legjobb él. Mivel ez az él b_1 számára is a legjobb a feladat feltétele szerint, ezért a kulcslemma miatt minden a_1 -ből és b_1 -ből induló élt törölhetünk az a_1b_1 kivételével anélkül, hogy ettől a stabil párosítások halmaza megváltozna.. (3 pont)

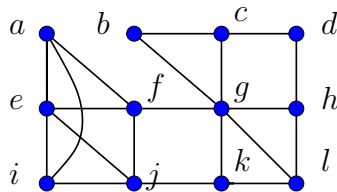
A törlések után kapott gráf egyik komponense az a_1b_1 él lesz. Ezen komponens elhagyásával pedig olyan gráf marad, amire szintén teljesül a feladatbeli feltétel. (3 pont)

Ezért folytathatjuk a kulcslemma alkalmazását, és hasonlóan törölhetünk egy a_2b_2 él végpontjaiból induló minden más élt. (2 pont)

Így folytatva az eljárást, mindvégig a kulcslemma szerinti éltörléseket végezve előbb-utóbb egy párosításhoz jutunk. (1 pont)

Ez a párosítás pedig az eredeti G gráf egyetlen stabil párosítása a kulcslemmáról szóló tétel miatt. (1 pont)

2. Van-e a bal oldali ábrán látható gráfnak olyan maxvissza sorrendje, amelyikben az utolsó két csúcs j és k ?



Az órán azt tanították, hogy $\lambda(v_{n-1}v_n) = d(v_n)$ teljesül, ha v_{n-1} a maxvissza sorrend utolsó előtti, v_n pedig ugyanannak a maxvissza sorrendnek az utolsó csúcsa. (3 pont)

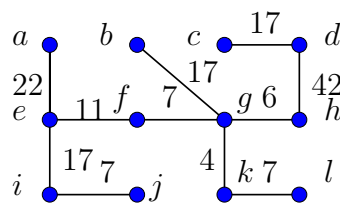
Alapos számolás mutatja, hogy $d(j) = 4$ és $d(k) = 3$, (2 pont)

miközben az fg és jk élek elhagyásától G két olyan komponensre esik szét, amelyek egyike j -t, a másik pedig k -t tartalmazza. (3 pont)

Ezek szerint $\lambda(j, k) \leq 2$, így $\lambda(j, k) \leq 2$ nem lehet sem $d(j)$ -vel, sem pedig $d(k)$ -val egyenlő. Ezért aztán j és k nem lehet G egyetlen maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa. (2 pont)

3. A G gráfról azt tudjuk, hogy a Nagamochi-Ibaraki és a Karger algoritmus által megtalált minimális vágások különbözők. A fenti jobb oldali ábra G egy Gomory-Hu fáját mutatja. Határozzuk meg a Gomory-Hu fa fg éle által reprezentált G -beli vágás értékét.

Mivel a két algoritmus két különböző minimális vágást talál, ezért G -nek legalább két különböző minimális vágása van. (1 pont)



Tudjuk, hogy a GH fa bármely csúcspárra tartalmaz az adott csúcspárt elválasztó minimális vágást. Ezért a GH fa valamelyik éle reprezentálni fogja G egy minimális vágását is. (3 pont)

Mindhogy G -nek legalább két minimális vágása van, ezért bármelyik minimális vágását is tekintjük, lesz olyan (u, v) pontpár G -ben, amit ez a minimális vágás nem választ el egymástól, azonban egy másik minimális vágás viszont igen. (2 pont)

A GH fa reprezentál egy az (u, v) pontpárt szeparáló minimális vágást, ezért a GH fának kell lennie a fent említetten túl legalább egy másik olyan élének is, amire a minimális vágás értéke van ráírva. (2 pont)

Mivel a GH fa élére írt legkisebb szám a 4 és ez csupán egyetlen élhez van rendelve, ezért G élösszefüggősége (azaz G minimális vágásának értéke) $\lambda(G) = 4$, és GH fának kell lennie legalább még egy 4-élű vágást reprezentáló élének. Ez az él pedig csakis fg lehet. Ezért a GH fa fg éle egy 4 élű vágást reprezentál. (2 pont)

4. A lenti ábra mutatja a G gráf Gomory-Hu fáját, az fg élre most 42 van írva. Határozzuk meg, legkevesebb hány élt kell G -ből törölni ahhoz, hogy az így kapott gráfnak ne legyen semmiféle fűlfelbontása, azaz G -t ne lehessen egy csúcsból előállítani fülek egymás utáni felragasztásával.

A gyakorlaton azt tanultuk, hogy egy gráfnak pontosan akkor van fűlfelbontása, ha 2-szeresen élösszefüggő. (2 pont)

Ezért úgy kell G -ből a lehető legkevesebb élt törölni, hogy a maradék gráf ne legyen kétszeresen élösszefüggő, azaz elvágó éle legyen. (2 pont)

Ezt pedig úgy tudjuk elérni, hogy G egy vágásából egy híján minden élt törölünk. (1 pont)

Akkor járunk tehát a legjobban, ha ezt G egy minimális vágására végezzük el. (1 pont)

A Gomory-Hu fa által meghatározott vágások között van minimális vágás, (3 pont)

ezért G minimális vágása 4 élt tartalmaz, vagyis a feladat kérdésére 3 a választ: legalább ennyi élt kell elhagyni ahhoz, hogy a kapott gráfnak ne legyen fűlfelbontása. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban minden $g(e)$ élkapacitás osztható 42-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha a z folyam nagysága 42 többszöröse, akkor van olyan z -vel azonos nagyságú z' folyam is ebben a hálózatban, amire $z(e)$ a G minden e éle esetén osztható 42-vel.

Tekintsük a $(D, s, t, \frac{g}{42})$ hálózatot. Ebben egyfelől minden élkapacitás egész, (2 pont)

másrészt pedig $\frac{z}{42}$ ebben egy egész nagyságú, megengedett folyam. (2 pont)

A folyamok kerekítési lemmája szerint tehát $\frac{z}{42}$ -nek van olyan z^* kerekítése, ami minden élen egész értéket vesz fel, és nagysága megegyezik $\frac{z}{42}$ nagyságával. (3 pont)

Ekkor a $z' = 42 \cdot z^*$ megengedett folyam lesz az eredeti (D, s, t, g) hálózatban, (1 pont)

továbbá z^* egész volta miatt z' minden éléhez 42-vel osztható értéket rendel, (1 pont)

végül pedig z' nagysága 42-szerese z^* nagyságának, azaz megegyezik z nagyságával. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

- ★ Tegyük fel, hogy G összefüggő, merevkörű, 99-reguláris gráf. Határozzuk meg G élkromatikus számát, $\chi'(G)$ -t.

Mivel G merevkörű, az órán tanultak szerint van szimpliciális csúcsa, mondjuk v . Mivel $d(v) = 99$, ezért v és a szomszédai egy 100 pontú K klikket alkotnak. A K klikk minden csúcsnak 99 szomszédja van K -n belül, tehát K -ből nem lép ki él a G 99-regularitása folytán. A G gráf összefüggő a feltétel szerint, ezért a most megtalált K klikk maga a G gráf. A Baranyai-tétel kapcsán láttuk, hogy $\chi(K_{2n}) = 2n - 1$, azaz $\chi(G) = \chi(K) = \chi(K_{100}) = 99$.

Megjegyzés A fenti bizonyítás hibája, hogy felhasználja a G gráf egyszerűségét. Könnyű olyan gráfot találni, amire teljesülnek a feladatban megkívánt feltételek, de az élkromatikus száma mégsem 99. Vegyünk pl. egy olyan C_3 -at, aminek két csúcspárja között 49, a harmadik pár közt pedig 50 párhuzamos él fut. Két ilyen gráfot összekötve a 98-adfokú csúcsaiknál olyan merevkörű gráfot kapunk, aminek az élkromatikus száma 148. Nem meglepő, hogy merevkörű gráfok vizsgálatokor általában egyszerű gráfokkal szokás foglalkozni. Úgyogy erre a feladatra mindenki megkapja a teljes érte járó pontszámot. Elnézést kérünk a hibás kitérés miatt és gratulálunk az ezt megfigyelő hallgatónak.

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH javítókulcs (2020. 05. 29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráfnak v olyan csúcsa, hogy G minden uv élére az uv él az u csúcs legrosszabb választása. Bizonyítsuk be, hogy ha uv egy M stabil párosítás éle, akkor az uv él a G minden stabil párosításában szerepel.

Tegyük fel, hogy M' a G egy stabil párosítása, és tekintsük az $S = M \triangle M'$ szimmetrikus különbséget. (2 pont)

Ha $uv \notin M'$, akkor uv az S egyik C komponensébe esik, és az órán tanultak miatt C a G egy olyan köre, aminek a mentén a preferenciák egyirányúak. (4 pont)

Legyen u és u' a v két szomszédja C mentén. Ekkor uv és $u'v$ is a legrosszabb él u ill. u' szerint, ami ellentmond annak, hogy C mentén a preferenciák egyirányúak. (3 pont)

S -nek nincs tehát az uv élt tartalmazó komponense, ami $uv \in M$ miatt csak úgy történhet meg, ha $uv \in M'$. Tetszőleges M' stabil párosítás tartalmazza tehát az uv élt, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy $u_1, u_2, \dots, u_n$ és $v_1, v_2, \dots, v_n$ a G gráf két olyan maxvissza sorrendje, amire $u_{n-1} = v_n$ és $u_n = v_{n-1}$ teljesül, azaz a két utolsó csúcs ugyanaz, de fordított sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy $d(u_{n-1}) = d(u_n)$.

Az órán azt tanultuk, hogy ha a maxvissza sorrend $\dots, u_{n-1}, u_n$ -re végződik, akkor $d(u_n) = \lambda(u_{n-1}, u_n)$ teljesül. (3 pont)

Hasonló okból $d(v_n) = \lambda(v_{n-1}, v_n)$, (2 pont)

azaz $d(u_n) = \lambda(u_{n-1}, u_n) = \lambda(u_n, u_{n-1}) = \lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$. Győztünk. (5 pont)

Avagy.

Mivel $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-2}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\} = V(G) \setminus \{u_{n-1}, u_n\} =: X$, ezért a maxvissza sorrend definíciója folytán $d(u_n, X) = d(v_n, X)$, hisz bármelyik csúccsal folytatható a maxvissza sorrend. (5 pont)

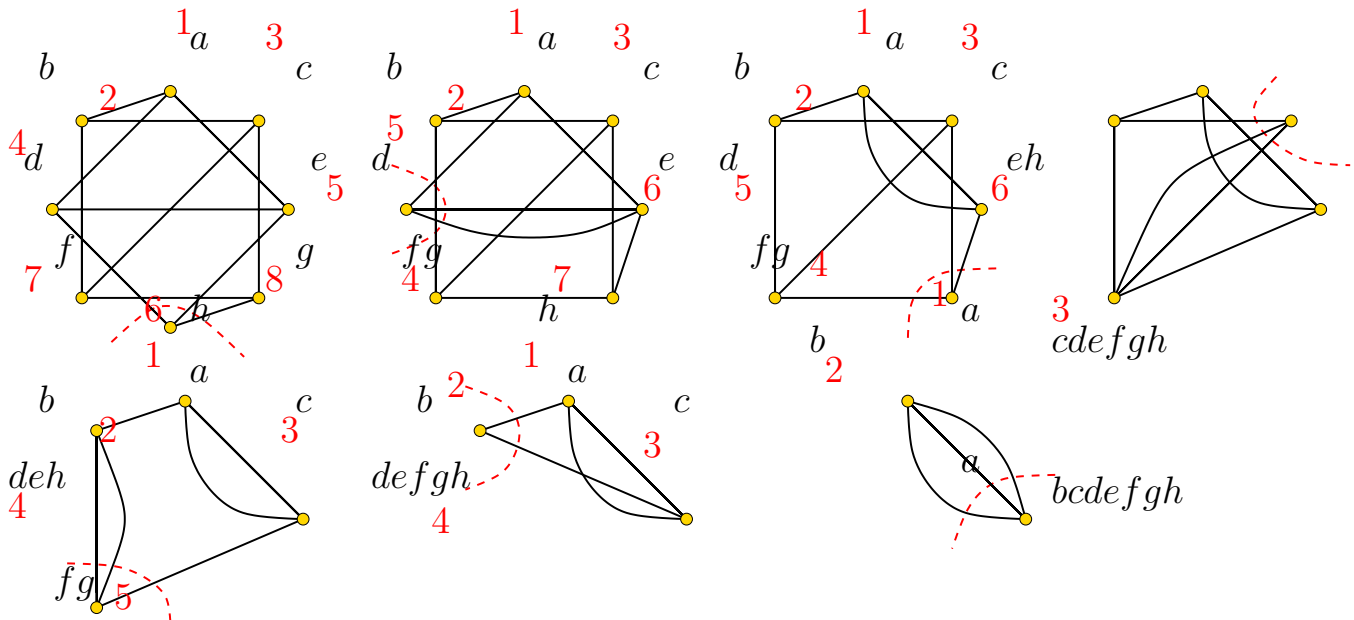
Ezért $d(u_n) = d(u_n, X) + d(u_n, v_n) = d(v_n, X) + d(u_n, v_n) = d(v_n)$. Vivát! (5 pont)

3. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig azt választjuk, amelyik ABC rendben a legelső lehet.

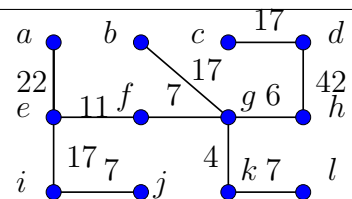
Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli névsormegkötéssel, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó csúcsa lesz. (3 pont)

Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A piros számok a maxvissza sorrendet, a szaggatott vonalak a vágásjelölteket mutatják. (6 pont)

Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben a $\{f, g\}$ ill. az $\{a, b, c, d, e, h\}$ csúcsok között futó két élből áll. (1 pont)



4. A mellékelt ábra mutatja a G gráf Gomory-Hu fáját. Határozzuk meg az fg él behúzásával létrejövő $G' = G + fg$ gráf egy Gomory-Hu fáját és a $\lambda_{G'}(a, k)$ ill. $\lambda_{G'}(b, i)$ értékeket.



Az ábrán látható GH fa által reprezentált vágások nem változnak az fg él által reprezentált kivételével. Mivel egy él behúzása nem csökkentheti semelyik pontpár közt az élösszefüggőséget, ezért fg kivételével a GH fa minden éle egy a két végpontot szeparáló minimális vágást reprezentál G' -ben is. (3 pont)

Az fg él behúzásának hatására $\lambda(f, g)$ pontosan eggyel nő meg, és G bármelyik f -et és g -t szeparáló minimális vágása az fg él hozzávétele után G' -ben is egy f -et és g -t szeparáló minimális vágás lesz. (2 pont)

Ezért G' GH fája csupán annyiban különbözik G GH fájától, hogy az fg él nem 7, hanem 8 élű vágást reprezentál. (1 pont)

Két pontot szeparáló minimális vágást megkaphatjuk, mint a két pontot a GH fán összekötő út élei által reprezentált vágások közül a legkevesebb élt tartalmazót. (2 pont)

Ezért $\lambda(a, k) = 4$ (1 pont)

és $\lambda(b, i) = 8$. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban minden $g(e)$ élkapacitás egész szám és z egy olyan folyam, aminek m_z nagysága egész. Bizonyítsuk be, hogy létezik minden $z(e)$ értéknek olyan $z'(e)$ (felfelé vagy lefelé) kerekítése, amire z' is megengedett folyam marad, nagysága z -ével egyezik meg (azaz $m_z = m'_z$) és egy előre megadott f élre $z'(f) = \lceil z(f) \rceil$.

Az órán igazoltuk a folyamok kerekítési tételét, ami szerint bizonyosan létezik olyan folyam, ami az f -en felvett érték felfelé kerekítésén kívül rendelkezik a többi szükséges tulajdonsággal. (1 pont)

Ennek a tételnek a bizonyítását követve igazolható a feladat állítása. Figyeljük meg, hogy egyetlen csúcsra sem illeszkedhet pontosan egy törtél (azaz olyan él, amin nem egész nagyságú folyam folyik). Nemterminális csúcsokra ez a folyammegmaradás miatt, az s és t terminálokra pedig a folyam nagyság egész volta miatt igaz. (2 pont)

Ezért ha van törtél, akkor azok irányítatlan megfelelői tartalmaznak kört. (2 pont)

Lehetséges e kör élein a folyam által felvett értékeket úgy módosítani ε -nal, hogy a Kirchhoff szabály továbbra is teljesüljön a nemterminális csúcsokra, a folyam nagyság ne változzon, de egyetlen élen se ugorjon át a folyamérték egész számot, valamint legalább egy törtélre az ott folyó folyam egészé váljon (azaz az eredeti folyamérték felfelé vagy lefelé kerekedjen). (2 pont)

Figyeljük meg, hogy az ε választható úgy is, hogy az f élen felvett folyamérték sose csökkenjen. (2 pont)

A fent leírt lépéseket addig végezve, míg van az aktuális folyamnak törtéle előbb-utóbb egészfolyamhoz jutunk, ami rendelkezik a feladatban megkívánt minden tulajdonsággal. (1 pont)

A megoldás során az órán szerepelt állítások helyes felidézése esetén az órai bizonyítást nem szükséges a megoldásban megismételni.

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2021. 05. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Jelölje a véges (de nem feltétlenül páros) G gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére. Határozzuk meg G csúcsainak fokszámát, és bizonyítsuk be, hogy G -nek van stabil párosítása.

Ha az uv élre $u(e) = 1$, akkor $r(e) = 42$ miatt $v(e) = 41$, ezért $d(v) \geq 41$. Ha $d(v) \geq 42$ volna, akkor lenne olyan f él, amire $v(f) = 42$, és ekkor $r(f) > 42$ volna, ami lehetetlen. Ezért $d(v) = 41$ minden olyan v csúcsra, amihez létezik olyan $e = uv$ él, hogy $u(e) = 1$. (2 pont)

Legyen v tetszőleges csúcsa G -nek, és induljunk el a v -ből induló legjobb él mentén, majd haladjunk tovább mindig az adott csúcsból induló legjobb él mentén. Minden csúcsba a legrosszabb (41-dik legjobb) él mentén érkezőnk meg, és G végessége folytán előbb-utóbb olyan csúcsba jutunk, ahol már jártunk. Ez csakis a v lehet, tehát $d(v) = 41$ teljesül G bármely v nemizolált csúcsára. (3 pont)

Tekintsük G azon $e = uv$ éleinek M halmazát, amire $u(e) = v(e) = 21$. Világos, hogy M a G egy párosítása. (3 pont)

Tegyük fel, hogy az $f = xy$ él blokkolja M -et. Ekkor $x(f) < 21$ és $y(f) < 21$, ezért $r(f) < 21 + 21 = 42$, ami ellentmondás. Ezek szerint M -hez nincs blokkoló él, tehát M stabil párosítás. Ezzel pedig igazoltuk a feladatban szereplő állítást. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G 4-élösszefüggő.

Az tanultuk, hogy az i -es címkéjű csúcsok egy feszítő erdejét adják annak a gráfnak, amit G -ből az i -nél kisebb címkéjű élek törlésével kapunk. (2 pont)

Ezek szerint bármely i -re az i címkéjű élek száma legfeljebb $n - 1$, hiszen G bármely feszítőfájának ennyi az élszáma. (1 pont)

Ha tehát a legfeljebb 4-es címkéjű élek száma $4n - 4$, akkor az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es címkéjű élekből egyaránt $n - 1$ van, (2 pont)

ezért a vizsgált élek G -nek négy éldisjunk feszítőfáját alkotják. (2 pont)

Ha tehát G -ből legfeljebb 3 élt hagyunk el, akkor a 4 feszítőfa valamelyikét nem bántjuk, ezért a kapott gráf összefüggő marad. (2 pont)

Azt kaptuk, hogy G bármely 3 élének törlését túléli, ezért G 4-élösszefüggő, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

3. Nevezzük a G gráfot *duplán faktorkritikusnak* (rövidítve *DFK*), ha G bármely két csúcsát elhagyva, a keletkező gráfnak van teljes párosítása. Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 közös csúccsal nem rendelkező DFK gráfok. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 egy u_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy u_2 csúcsával és G_1 egy v_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy v_2 csúcsával, akkor az így kapott G gráf is DFK.

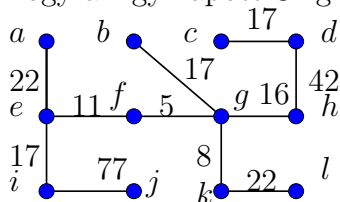
Megmutatjuk, hogy G -nek tetszőleges u, v csúcsait elhagyva a kapott gráfnak lesz teljes párosítása. (1 pont)

Ha $u, v \in V(G_1)$, akkor tekintsük a $G_2 - u_2 - v_2$ egy M teljes párosítását és a $G_1 - u - v$ egy N teljes párosítását. A gráfok DFK tulajdonsága miatt vannak ilyen teljes párosítások. Ekkor $M \cup N$ a $G - u - v$ egy teljes párosítása. (4 pont)

Az $u, v \in V(G_2)$ eset hasonlóan igazolható. (1 pont)

Az az eset marad, amikor $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Legyen ekkor M a $G_2 - v - v_2$ és N a $G_1 - u - u_1$ gráf teljes párosítása. A gráfok DFK tulajdonsága miatt vannak ilyen teljes párosítások. Ekkor $M \cup N$ a $G - u - v$ egy teljes párosítása. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (4 pont)

4. A G gráf Gomory-Hu-fája látható az ábrán. Határozzuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G -be ahhoz, hogy az így kapott G' gráfnak legyen 4-élösszefüggő irányítása.



Nash-Williams tanult tétele szerint egy véges, irányítatlan G gráfnak pontosan akkor van 4-élösszefüggő irányítása, ha G irányítatlan értelemben 8-élösszefüggő. (3 pont)

A cél tehát az, hogy G -t minimális számú élt behúzásával 8-élösszefüggővé tegyük. (2 pont)

A Gomory-Hu-fának egyetlen olyan éle van, ami 8-nál kisebb (konkrétan 5 élből álló) vágást határoz meg.

Ezért legalább $8 - 5 = 3$ élt mindenképp be kell húzni G -be a 8-szoros élösszefüggőség eléréséhez. (2 pont)

A GH-fa fg éle által meghatározott vágás az egyik oldalon az a, e, f, i és j csúcsokat tartalmazza, a másik oldalon az összes többi. Ha tehát G egy vágása kettévágja az $\{a, e, f, i, j\}$ halmazt vagy a komplementerét, akkor G ezen vágása biztosan legalább 8 élt tartalmaz. G -nek ezért csupán egyetlen olyan vágása lehet, ami 8-nál kevesebb élt tartalmaz, konkrétan a Gomory-Hu-fa fg éle által meghatározott 5-élű vágás. (1 pont)

Ezért ha ezen vágás két oldal közé behúzunk 3 további élt, akkor G -ből egy 8-élösszefüggő gráfot kapunk. (1 pont)

A keresett minimális élszám tehát 3. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy u és v a 4-szeresen élösszefüggő G negyedfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u és v kicserélhetnek két szomszédot a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával, azaz található u -nak két szomszédja (mondjuk a és b) illetve v -nek két szomszédja (mondjuk c és d) úgy, hogy a $G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vd$ gráf is 4-szeresen élösszefüggő.

Mivel G 4-élösszefüggő és $d(u)$ és $d(v)$ párosak, Lovász teljes leemelésről szóló tétele alkalmazható. (2 pont)

Jelölje G' az u , majd a v csúcs teljes leemelésével kapott, a tétel értelmében szintén 4-élösszefüggő gráfot. (3 pont)

Tanították, hogy egy $2k$ -élösszefüggő gráfban k él összecspése megőrzi a $2k$ -élőf tulajdonságot, ezért a teljes leemelések után kapott gráf 4-élösszefüggő. (2 pont)

Ha u és v nem voltak szomszédosak, akkor 4 új élt keletkezett: kettő (mondjuk piros) u szomszédain, és másik kettő (mondjuk zöld) v szomszédain. Ha most összecspjük mindkét piros élt egy-egy zöld éllel, akkor ezzel elérjük a kívánt állapotot, azaz, hogy u és v úgy cseréljenek ki két szomszédot, hogy a kapott gráf 4-élőf maradjon. (2 pont)

Ha u és v nem voltak szomszédosak, akkor a teljes leemelés után három élt keletkezett, egy (mondjuk piros) u szomszédain, egy (mondjuk zöld) v szomszédain, és egy (mondjuk fehér), ami u és v egy-egy szomszédját köti össze. Ha most összecspjük a piros és a zöld élt, majd az összecspített csúcsból induló egyik élt a fehér éllel, akkor ismét célt érünk. (1 pont)

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH javítókulcs (2021. 05. 14.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Jelölje a G páros gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére. Bizonyítsuk be, hogy G minden e élét tartalmazza G egy alkalmas stabil párosítása.

Megmutatjuk először, hogy G minden nemizolált csúcsa 41-fokú. Legyen $v \in V(G)$, és induljunk el v -ből, mindig az adott csúcs legjobb élén továbbhaladva. Az $r(e) = 42$ feltétel miatt minden csúcsba a 41-dik legjobb élen érkezünk meg, és előbb-utóbb olyan csúcsba jutunk, ahol már jártunk. Ez a csúcs pedig csakis v lehet, tehát $d(v) \geq 41$ (3 pont)

Ha $d(v) > 41$, akkor lenne olyan e él, amire $v(e) = 42$, és ezért $r(e) > 42$, ami ellentmondás. Tehát G izolált pontoktól eltekintve 42-reguláris. (3 pont)

Legyenek A és B a G gráf színosztályai, és $1 \leq i \leq 41$ esetén legyen $M_i := \{e = ab \in E(G) : a(e) = i\}$. Világos, hogy $E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{41}$, ezért elegendő azt igazolni, hogy minden M_i stabil párosítás G -ben. (2 pont)

M_i párosítás, hisz minden A -beli csúcsból legfeljebb 1 M -beli él indul (az i -dik legjobb), és minden B -beli csúcs is legfeljebb 1 M -beli élre illeszkedik (a $(42 - i)$ -dik legjobbra). (1 pont)

Ha pedig az $f = ab$ él blokkolná az M_i párosítást, akkor $a(f) < i$ és $b(f) < 42 - i$, ahonnan az $r(f) < i + 42 - i = 42$ ellentmondás adódna. M_i tehát stabil párosítás, és ez igazolja a feladat állítását. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf nem 4-élösszefüggő, és egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 5$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G -nek egyetlen egy háromélű vágása van.

Az tanultuk, hogy az i -es címkéjű csúcsok egy feszítő erdejét adják annak a gráfnak, amit G -ből az i -nél kisebb címkéjű élek törlésével kapunk. (2 pont)

Ezek szerint bármely i -re az i címkéjű élek száma legfeljebb $n - 1$, hiszen ennyi G bármely feszítőfájának élszáma. (1 pont)

Ha tehát a legfeljebb 4-es címkéjű élek száma $4n - 5$, akkor az 1-es, 2-es és 3-as címkéjű élekből $n - 1$ van, a 4-es címkéjű élek száma pedig $n - 2$, azaz ezen utóbbi élek egy két komponensű feszítő erdőt alkotnak. (2 pont)

Tudjuk, hogy G nem 4-élösszefüggő, ezért G -nek van legfeljebb 3 élt tartalmazó vágása. (1 pont)

Ráadásul G -nek bármely vágását is tekintjük, az tartalmaz egy-egy élt az 1-es, 2-es illetve 3-as címkéjű élek alkotta feszítőfák mindegyikéből. (1 pont)

Ezért ha G egy vágása legfeljebb 3 élt tartalmaz, akkor ez a vágás nem tartalmaz 4-es címkéjű élt. (1 pont)

Mivel a 4-es címkéjű élek egy két komponensű feszítő erdőt alkotnak, ezért G -nek egyetlenegy olyan vágása van, ami nem tartalmaz 4-es címkéjű élt (konkrétan a komponensek által meghatározott vágás), és G -nek kizárólag ez az egy vágása lehet 3-élű. (2 pont)

3. Legkevesebb hány élt kell behúzni a $K_{n,n+1}$ teljes páros gráfba, hogy faktorkritikus gráfot kapjunk?

A $K_{n,n+1}$ gráf nem faktorkritikus, mert az n pontú színosztályból csúcsot elhagyva nem lesz a kapott $K_{n-1,n+1}$ gráfnak teljes párosítása, ezért legalább egy élt be kell húzni a faktorkritikusság eléréséhez. (3 pont)

Ha azonban az $n + 1$ csúcsból álló színosztály két csúcsát összekötjük, akkor az így kapott G' gráfnak lesz egy $2n + 1$ csúcsból álló Hamilton-köre. (4 pont)

Mivel C_{2n+1} faktorkritikus, ezért G' is faktorkritikus, tehát egy él behúzásával elérhető a kívánt cél. (2 pont)

A kérdésre a válasz tehát, hogy legkevesebb egy él behúzása szükséges. (1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely n -pontú, irányítatlan, véges G gráfba behúzható $n - 1$ él úgy, hogy az így kapott G' gráfra $\lambda_{G'}(u, v) = \lambda_G(u, v) + 1$ teljesüljön G minden u, v csúcsára. (Párhuzamos él behúzása is megengedett.)

Legyen F a G Gomory-Hu-fája. Megmutatjuk, hogy ha behúzzuk G -be az F $n - 1$ élét, akkor az így kapott G' gráfra fennál a kívánt tulajdonság. (3 pont)

A G tetszőleges u, v csúcsai esetén Menger tétele miatt G -ben van $\lambda_G(u, v)$ páronként éldiszjunkt uv -út. Mivel a behúzott élek feszítőfát alkotnak, azok is tartalmaznak egy uv -utat, ezért G' -ben található $\lambda(u, v) + 1$ páronként éldiszjunkt út, ezért $\lambda_{G'}(u, v) \geq \lambda_G(u, v) + 1$. (3 pont)

Tekintsük az F Gomory-Hu-fa azon f élét, ami egy $\lambda_G(u, v)$ nagyságú uv -vágást határoz meg G -ben. Az f által meghatározott vágás a G' gráfban $\lambda_G(u, v) + 1$ élt tartalmaz, ezért $\lambda_{G'}(u, v) \leq \lambda_G(u, v) + 1$. (3 pont)

A két megfigyelést összevetve kapjuk, hogy $\lambda_{G'}(u, v) = \lambda_G(u, v) + 1$ teljesül G bármely két u, v csúcsára, nekünk pedig pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy az M $n \times m$ méretű mátrix minden eleme egy $\mathbb{R}^3$ -beli vektor, továbbá hogy a mátrix minden sorában és oszlopában az ott szereplő vektorok összege egész vektor, azaz $\mathbb{Z}^3$ eleme. Igaz-e, hogy az M mátrixban álló minden egyes vektor helyettesíthető egy egész vektorral úgy, hogy e cserék hatására egyetlen sor- illetve oszlopösszeg se változzon meg?

Képezzük az M_1, M_2 és M_3 mátrixokat az M mátrixból úgy, hogy az egyes mezőkben álló vektorokat az első, második ill. harmadik koordinátájukkal helyettesítjük. (1 pont)

A feladat feltétele miatt mindhárom M_i mátrixra teljesül, hogy bármely sorösszege és bármely oszlopösszege egész. (3 pont)

A táblázatkerekítési lemmát az imént definiált M_i mátrixokra alkalmazva az M'_i mátrixokat kapjuk. (3 pont)

Képezzük az M' mátrixot az M'_i mátrixokból úgy, hogy M' minden elemének első, második ill. harmadik koordinátáját az M'_i mátrix megfelelő eleme tartalmazza. (2 pont)

A konstrukció folytán M' elemei egész vektorok, továbbá M' sor- és oszlopösszegei megegyeznek M megfelelő sor- és oszlopösszegeivel, igazoltuk tehát a kívánt tulajdonságú mátrix létezését. (1 pont)

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2022. 05. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa kék vagy sárga, és tegyük fel továbbá, hogy G minden páratlan köre tartalmaz kék és sárga csúcsot is. Tudjuk, hogy G minden v csúcsához olyan $\preceq_v$ lineáris rendezés tartozik a v -re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán amiben minden kék csúcsba futó él megelőz minden sárga csúcsba vezető élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek ezen preferenciák mellett van stabil párosítása.

Mivel minden páratlan kör tartalmaz kék és sárga csúcsot is, ezért mind a kék, mind a sárga csúcsok páros gráfot feszítenek. (1 pont)

Ezen kívül definíció szerint páros gráfot alkotnak a kék és sárga csúcsokat összekötő élek is. (1 pont)

A Gale-Shapley-tétel miatt tehát a kék csúcsok feszítette részgráfnak található egy M_1 stabil párosítása, (2 pont)

ami G minden M_1 -gyel közös csúccsal rendelkező élét dominálja a stabilitás és a preferenciákra kimondott feltételek miatt. (2 pont)

Az M_1 által fedetlen csúcsokon a kék-sárga élek páros gráfot alkotnak, legyen M_2 ennek egy stabil párosítása. (1 pont)

Világos, hogy $M_1 \cup M_2$ párosítás, és az is látszik, hogy $M_1 \cup M_2$ minden olyan élt dominál, ami nem diszjunkt $M_1 \cup M_2$ -től. (1 pont)

Ezek után már csak az $M_1 \cup M_2$ -vel közös végponttal nem rendelkező élek dominálásáról kell gondoskodni. Ezen élek mindkét végpontja sárga, továbbá ezek az élek is páros gráfot alkotnak, ezért található hozzájuk egy M_3 stabil párosítás. (1 pont)

Mivel az $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ párosítás G minden más élét dominálja, ezért csakugyan van G -nek stabil párosítása, épp ahogy azt a feladat is állítja. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a legalább 3 csúcsú hurokélmentes, de nem feltétlenül egyszerű G gráfnak nincs két azonos fokszerű csúcsa. Igazoljuk, hogy van G -nek olyan csúcsa, ami G egyetlen maxvissza sorrendjében sem az utolsó.

Jelölje n a G gráf csúcsainak számát. Az órán azt tanították, hogy ha v_{n-1} és v_n a maxvissza sorrend két utolsó csúcsa, akkor $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$ köztük a lokális élösszefüggőség. (3 pont)

A Gomory-Hu fáról tanultak miatt G bármely két csúcsa közötti élösszefüggőség megegyezik a Gomory-Hu fa $n - 1$ élének valamelyikére írt számmal. (4 pont)

Ezért G csúcsai között a lokális élösszefüggőség legfeljebb $(n - 1)$ -féle lehet, vagyis G csúcsainak n -féle fokszerű között lesz olyan, ami nem egyezik meg egyetlen $\lambda(u, v)$ -vel sem. (2 pont)

Az ilyen fokszerű csúcs nem lehet maxvissza sorrend utolsó csúcsa sem. (1 pont)

Az utolsó 7 pont másképp is megszerezhető.

Ha v a G maximális fokszerű csúcsa, akkor $\lambda(u, v) \leq \min(d(u), d(v))$ miatt $\lambda(u, v) \neq d(v)$ teljesül G bármely $u \neq v$ csúcsára. (6 pont)

Ezek szerint v egyetlen maxvissza sorrendnek se lehet utolsó csúcsa. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráf minden $u \neq v$ csúcsához létezik G -nek olyan M_u maximális párosítása, ami nem fedi u -t. Bizonyítsuk be, hogy ha $G - v$ összefüggő, akkor G -nek olyan M_v maximális párosítása is van, ami v -t nem fedi.

A feltétel azt mondja ki, hogy $u \in D(G)$ teljesül G minden $u \neq v$ csúcsára. (2 pont)

Nekünk azt kell igazolnunk, hogy $v \in D(G)$ is teljesül. (1 pont)

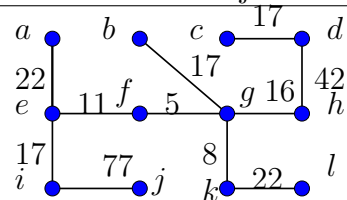
Ha v a G izolált csúcsa, akkor $D(G)$ definíciója miatt $v \in D(G)$. (1 pont)

Ha v nem izolált, akkor van v -nek $D(G)$ -beli szomszédja. Ezért $v \in A(G)$ vagy $v \in D(G)$. (1 pont)

Ha $v \in A(G)$, akkor $A(G) = \{v\}$. Mivel nincs G -nek teljes párosítása, és $X = A(G)$ minimalizálja a Berge-Tutte-formulát, ezért $1 = |A(G)| < o(G - A(G))$. Így $o(G - v) \geq 2$, vagyis $G - v$ nem összefüggő. (4 pont)

A feltétel szerint $G - v$ összefüggő, ezért $v \in D(G)$ teljesül, ahogy azt a feladat állítja. (1 pont)

4. Az ábrán a G gráf egy Gomory-Hu fája látható. Mennyi a $G' = G + jk$ gráfban a $\lambda_{G'}(a, d)$ lokális élösszefüggőség?



A Gomory-Hu fa definíciójából adódóan $\lambda_G(a, d) = 5$, hiszen 5 a legkisebb címke az GH fa ad -útja mentén. (3 pont)

Egy él behúzásának hatására ez a lokális élösszefüggőség természetesen nem csökkenhet, és növekedni is legfeljebb csak 1-gyel tud. Ezért $5 \leq \lambda_{G'}(a, d) \leq 6$. (1 pont)

Ha $\lambda_{G'}(a, d) = 5$, akkor G' -nek (és így G -nek is) van olyan 5-ös vágása, ami nem szeparálja a behúzott él j és k végpontjait. Egy ilyen vágásnak különböznie kell a GH fa fg éle által meghatározott vágástól, hiszen az szeparálja j -t és k -t. E hipotetikus vágásnak tehát szeparálnia kell G két olyan csúcsát (mondjuk u -t és v -t) is, amit a GH-fa 5-ös vágása nem szeparál. Mivel a GH fa minden fg -től különböző éléhez 5-nél nagyobb vágás tartozik, ezért $\lambda_G(u, v) > 5$. (5 pont)

Ezek szerint $5 < \lambda_{G'}(a, d)$, amiből a fenti megfigyeléseink miatt $\lambda_{G'}(a, d) = 6$ adódik. (1 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetszőleges mátrix, akkor A minden eleme kerekíthető úgy felfelé vagy lefelé, hogy A minden sor- és oszlopösszege is felfelé vagy lefelé kerekedjék.

Egészítsük ki A -t egy sorral és oszloppal, és írjunk az új helyekre $0 \leq x < 1$ számokat úgy, hogy a kiegészített mátrix minden sor és oszlopösszege egész legyen. (4 pont)

Kerekítsük az így kapott mátrix elemeit a tanult táblázat-kerekítési lemmában szereplő módon. (3 pont)

Ha egy kiegészítő elem felfelé kerekedett, akkor az eredeti mátrix adott sor- vagy oszlopösszegét lefelé kerekítettük, a felfelé kerekedő elem pedig az adott sor- vagy oszlopösszeg lefelé kerekedését vonja maga után. (3 pont)

Hab a tortán, hogy a hozzáadott sarokelem kerekedése miatt az A mátrix összes elemének összege is kerekedett. (0 pont)

Avagy.

Kellően nagy M pozitív egészt hozzáadva A minden eleméhez feltehető, hogy a kapott A' mátrix minden eleme pozitív. A továbbiakban A' kerekítésével foglalkozunk: ha ez sikerül, akkor ugyanolyan irányban kell A elemeit is kerekíteni, és ezáltal a sor- ill. oszlopösszegek is kerekednek, hisz $n \cdot M$ -mel ill. $k \cdot M$ -mel lesznek kisebbek az A' -beli megfelelő összegeknél. (4 pont)

Az A' mátrixból a szokásos módon páros gráfot, majd abból hálózatot készítünk. E hálózaton az x folyamat szintén a szokásos módon definiáljuk: A' elemei a megfelelő élen felvett folyamértékeket jelentik, a terminálokra illeszkedő élek által hordozott folyam pedig egyértelműen adódik. (3 pont)

A folyamokról szóló kerekítési lemma szerint kerekítve az x folyamatot, a kapott x' folyamnak az A' elemeihez tartozó értékei pontosan azt írják le, hogyan kell az A' mátrix elemeit kerekíteni. Mivel a terminálokra illeszkedő élek az A' sor- ill. oszlopösszegeinek felelnek meg, ezért azok is kerekednek, ahogy ezt a feladat előírta. (3 pont)

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH javítókulcs (2022. 05. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa piros vagy zöld, és tegyük fel továbbá, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros és zöld csúcsot is. Tudjuk, hogy G minden v csúcsához olyan $\preceq_v$ lineáris rendezés tartozik a v -re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán amiben minden v -vel azonos színű csúcsba futó él megelőz minden v -étől különböző színű csúcsba vezető élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek ezen preferenciák mellett van stabil párosítása.

Mivel minden páratlan kör tartalmaz piros és zöld csúcsot is, ezért mind a piros, mind a zöld csúcsok páros gráfot feszítenek. (1 pont)

Ezen kívül definíció szerint páros gráfot alkotnak a piros és zöld csúcsokat összekötő élek is. (1 pont)

A Gale-Shapley-tétel miatt tehát a piros csúcsok feszítette részgráfnak található egy M_p stabil párosítása, a zöld csúcsok feszítette gráfnak pedig egy M_z stabil párosítása. (3 pont)

A preferenciákról szóló feltevés miatt $M_p \cup M_z$ dominál minden olyan élt, aminek a két végpontja azonos színű, és ezeken túl azokat az éleket is amelyekkel van közös csúcsa. (2 pont)

Már csak $M_p \cup M_z$ által fedetlen (és egyébként piros-zöld) éleket kell dominálni. Az ezen élek alkotta G' gráf is páros, a Gale-Shapley-tétel miatt van tehát G' -nek egy M_{pz} stabil párosítása. (2 pont)

A konstrukcióból adódóan $M_p \cup M_z \cup M_{pz}$ olyan párosítás G -ben, ami minden élt dominál, tehát G -nek csakugyan van stabil párosítása, ahogy azt a feladat is állítja. (1 pont)

Avagy.

Ha Irving algoritmusával keresünk stabil párosítást, akkor az egyetlen oka annak, hogy az algoritmus ne találjon ilyet az, ha az algoritmus olyan rotációra akad, ami egy páratlan preferenciakör. (4 pont)

Megmutatjuk, hogy ilyen preferenciakör nincs G -ben, ezért Irving algoritmusunk bizonyosan egy stabil párosítás megtalálása után áll le. (2 pont)

A feladat feltételei szerint G minden páratlan körének van piros és zöld csúcsa is. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy C egy páratlan preferenciakör. Mivel C páratlan, C csúcsai nem színezhetők felváltva pirosra és zöldre. Ezért C -nek van két szomszédos egyszínű csúcsa, és C -nek van olyan csúcsa is, aminek a színe különbözik e csúcsok színétől. Bármelyik irányban is haladunk körbe C -n, lesz két olyan egymást követő él, amelyekre a korábbi él jobb a későbbinél, és két olyan is, ahol a későbbi él jobb a korábbinál. Ezek szerint C nem lehet páratlan preferenciakör, és nekünk pontosan erre volt szükségünk. (4 pont)

2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros vagy zöld szín valamelyikével úgy, hogy a piros és a zöld élek alkotta részgráfok mindegyikének legyen fülfelbontása.

Azt tanították az órán, hogy az azonos címkét kapó élek feszítő erdejét alkotják a kisebb címkéjű élek törlésével keletkező gráfnak. (2 pont)

Mivel egy feszítő erdőnek legfeljebb $n - 1$ éle lehet, és ennyi is csak akkor, ha feszítőfáról van szó, a legfeljebb 4-es címkét kapó élek a G gráf 4 éldiszjunkt feszítőfáját alkotják. (2 pont)

Színezzük a legfeljebb 2-es címkét kapó éleket pirosra, a 2-nél nagyobb címkéjűeket pedig zöldre. (2 pont)

Mivel bármely két csúcs között található két éldiszjunkt piros út (az 1-es és 2-es címkémű élek alkotta két feszítőfán) és két éldiszjunkt zöld út (a 3-as és 4-es címkéjű élek alkotta másik két feszítőfán), ezért a piros és a zöld élek is 2-élösszefüggő gráfot alkotnak a G gráf n csúcsán. (2 pont)

A tanultak szerint tehát mind a piros, mind a zöld élek alkotta gráfnak van fülfelbontása, és ezzel igazoltuk a feladat állítását. (2 pont)

3. Tegyük fel, hogy a 999 csúcsú G gráf v csúcsa G minden más csúcsával össze van kötve, továbbá, hogy G -nek van olyan maximális méretű párosítása, ami nem fedi v -t. Legyen u a G egy v -től különböző csúcsa. Határozzuk meg $\nu(G - u)$ -t, azaz a $G - u$ gráf maximális párosításának méretét.

Ha G egy M maximális párosítása elkerüli v -t, akkor M fedi a v minden szomszédját, hiszen ha nem így volna, akkor M -et bővíthetnénk egy v -ből induló éllel. (2 pont)

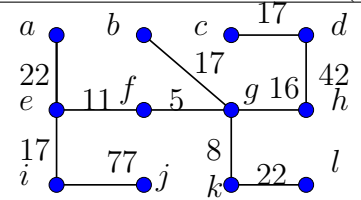
Mivel v apex, ezért a v -t elkerülő teljes párosítás G minden v -től különböző csúcsát fedi, azaz $|M| = \frac{999-1}{2} = 499$. (2 pont)

A $G - u$ gráf egy M' párosítását megkaphatjuk úgy, hogy M -ből töröljük az u -t fedő uu' élt. Ekkor $|M'| = |M| - 1 = 498$. (2 pont)

Mivel v apex, ezért $vu' \in E(G)$, tehát $G - u$ -nak $M' \cup \{vu'\}$ egy 499 méretű párosítása. Ezért $\nu(G - u) \geq 499$. (2 pont)

Világos, hogy $\nu(G - u) \leq \frac{|V(G-u)|}{2} = \frac{998}{2} = 499$,
a két utóbbi összefüggésből pedig $\nu(G - u) = 499$ adódik. (1 pont)

4. Az ábrán a G gráf egy Gomory-Hu fája látható. Tegyük fel, hogy $ih \in E(G)$. Határozzuk meg a $\lambda_{G'}(b, c)$ élösszefüggőséget a hi él törlésével keletkező $G' = G - hi$ gráfban!



Mivel G' a G -ből egyetlen él törlésével keletkezik, ezért a lokális élösszefüggőség legfeljebb 1-gyel csökkenhet: $\lambda_{G'}(b, c) \geq \lambda_G(b, c) - 1$. (2 pont)

A G Gomory-Hu fájáról leolvasható, hogy $\lambda_G(b, c) = 16$, (2 pont)

ezért $\lambda_{G'}(b, c) \geq 16 - 1 = 15$, (1 pont)

továbbá $E(\{c, d, h\})$ egy 16 nagyságú, b -t és c -t szeparáló vágás G -ben. (2 pont)

Mivel G' a hi él törlésével keletkezett, ezért a c, d és h pontok indukálta vágás G' -ben $16 - 1 = 15$ nagyságú. (2 pont)

Ezek szerint $\lambda_{G'}(b, c) = 15$. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban a c költségfüggvényre nézve z_1 egy 42 nagyságú, 42 költségű, z_2 pedig egy 90 nagyságú, 102 költségű st -folyam. Bizonyítsuk be, hogy ebben a hálózatban a 66 nagyságú minimális költségű st -folyam költsége legfeljebb 77.

Legyen $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. (2 pont)

Ekkor z megengedett st -folyam. (1 pont)

A z nagysága $m_z = \frac{m_{z_1} + m_{z_2}}{2} = \frac{42 + 90}{2} = 66$. (3 pont)

A z költsége pedig $c(z) = \frac{c(z_1) + c(z_2)}{2} = \frac{42 + 102}{2} = 72 < 77$. (3 pont)

Van tehát a hálózatban 66-nagyságú, legfeljebb 77-költségű st -folyam, ezért a minimális költségű, 66 nagyságú folyam költsége legfeljebb 77. (1 pont)

Könnyen látható, hogy $z' = \frac{66}{90}z_2$ egy 66 nagyságú, és $\frac{66}{90} \cdot 102 < 77$ költségű st -folyam, és ezzel a z' -vel is hasonlóan lehet érvelni.

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2023. 05. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsait úgy színeztük ki az $1, 2, \dots, k$ színekkel, hogy G minden éle különböző színű csúcsokat köt össze. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $uv, uw \in E(G)$ és $c(v) < c(w)$, akkor $uv \prec_u uw$, azaz u számára az uv él jobb, mint az uw él. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van stabil párosítása.

A G gráfnak biztosan van stabil félpárosítása, amit pl az Irving-algoritmussal kaphatunk meg. (1 pont)

Ha ez nem stabil párosítás, akkor bizonyosan tartalmaz olyan $\frac{1}{2}$ súlyú éleket, amelyek páratlan hosszúságú preferenciakört alkotnak. (2 pont)

Indirekt igazoljuk, hogy G -ben nincs páratlan preferenciakör. Tfh u.i., hogy $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ ilyen kört alkotnak, azaz $v_1v_2 \succ_{v_2} v_2v_3 \succ_{v_3} v_3v_4 \succ_{v_4} \dots \succ_{v_{2k+1}} v_{2k+1}v_1$. (1 pont)

Ezért $c(v_1) \geq c(v_3) \geq \dots \geq c(v_{2k+1}) \geq c(v_2) \geq \dots \geq c(v_{2n}) \geq c(v_1)$, (3 pont)

így végig egyenlőségnek kell állnia, speciálisan $c(v_1) = c(v_2)$. Ez $v_1v_2 \in E(G)$ miatt ellentmond annak, hogy c a G csúcsainak egy helyes színezése. (2 pont)

Nincs tehát G -ben páratlan hosszúságú preferenciakör, ezért G minden stabil félpárosítása valójában stabil félpárosítás. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

Az éltörlési lemmával is dolgozhatunk.

Az éltörlési lemmával töröljünk G -ből annyi élt, amennyit csak lehet. Ha már nem lehet így további élt törölni, akkor a kapott G' gráf bármely $e = uv$ élére a tanultak szerint teljesül, hogy e pontosan akkor a legjobb éle u -nak, ha e a legrosszabb éle v -nek. (3 pont)

Tekintsük G' -ben a csúcsok legjobb éleinek L halmazát! A fent említett tulajdonság miatt L megegyezik a csúcsok legrosszabb éleinek halmazával. (1 pont)

Minden (nemizolt) v csúcsra pontosan egy legjobb és egy legrosszabb él illeszkedik, ezért az L -beli élek preferenciaköröket alkotnak. (1 pont)

Legyen pl $v_1, v_2, \dots, v_k$ egy ilyen preferenciakör, azaz $v_1v_2 \succ_{v_2} v_2v_3 \succ_{v_3} v_3v_4 \succ_{v_4} \dots \succ_{v_k} v_kv_1$. (1 pont)

A színezésre vonatkozó szabály miatt $c(v_1) \geq c(v_3) \geq \dots \geq c(v_1)$ ill. $c(v_2) \geq c(v_4) \geq \dots \geq c(v_2)$ adódik, ahonnan $c(v_1) = c(v_3) = \dots$ ill. $c(v_2) = c(v_4) = \dots$ teljesül a másodsomszédos csúcsok színeire. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy G' tetszőleges v csúcsára a v -ből induló legjobb ill. legrosszabb él ugyanabba a színosztályba fut. (1 pont)

Ezért a G' gráf bármelyik komponense csak két színosztályból tartalmazhat csúcsot, vagyis G' minden komponense – ekkor persze maga G' is – páros gráf. (1 pont)

A Gale-Shapley-tétel miatt G' -nek létezik egy M stabil párosítása, és az éltörlési lemma miatt M a G -nek is stabil párosítása. (1 pont)

2. Igazoljuk, hogy ha G k -reguláris gráf, akkor található G -ben k páronként éldisjunk út alkalmas u és v csúcsok között.

Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ a G gráf egy maxvissza sorrendje. Az órán azt tanították, hogy $\lambda(v_{n-1}v_n) = d(v_n)$ (4 pont)

$= k$, hiszen a G gráf k -reguláris. (3 pont)

Menger tanult tétele szerint ez azt jelenti, hogy $u = v_{n-1}$ és $v = v_n$ között vezet k páronként éldisjunk út, és nekünk pontosan ezt kellett igazolni. (3 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráf két komponensből áll: az egyik C_{42} , a másik K_{77} . Legkevesebb hány élt kell behúzni G -be ahhoz, hogy faktorkritikus gráfot kapjunk?

A G gráf nem faktorkritikus, ugyanis a C_{42} komponensből egy csúcsot elhagyva két páratlan komponenset kapunk, nem lesz benne teljes párosítás. (1 pont)

Ezért legalább egy élt be kell húzni a két komponens közé a faktorkritikus tulajdonság eléréséhez. (2 pont)

Ha csupán egyetlen e élt húzunk be, akkor ezen él C_{42} -beli végpontját elhagyva ismét egy két páratlan komponensből álló gráf teljes párosítását keressük. (2 pont)

A keresett minimum tehát legalább 2. (1 pont)

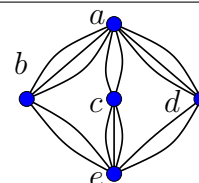
Ha azonban a két komponens közé két diszjunkt élt húzunk be, akkor a kapott gráfnak lesz Hamilton-köre. Ez a Hamilton-kör páratlan sok csúcsot tartalmaz, így faktorkritikus. (2 pont)

Faktorkritikus gráfhoz további éleket adva faktorkritikus gráfot kapunk, ezért G -hez a fenti módon hozzáadott két élt faktorkritikus gráfot eredményez. (1 pont)

A szükséges minimális élszám tehát pontosan kettő. (1 pont)

Akkor is faktorkritikus gráf adódik, ha a két hozzáadott élnek a K_{77} komponensben közös csúcsa van. Ez pl abból látszik, hogy az így kapott gráfnak van páratlan fűlfelbontása.

4. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf egy Gomory-Hu fáját!

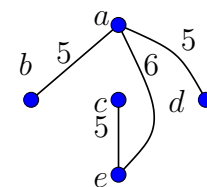


A keresett GH-fa a mellékelt ábrán látható. (3 pont)

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fa élein szereplő számok az egyes faélek által meghatározott vágások élszámait adják meg. (1 pont)

Az is könnyen látszik, hogy a b, c, d csúcsok mindegyikéből vezet 5 éldiszjunkt út bármely másik csúcsba, (2 pont)

illetve a és e között vezet 6 éldiszjunkt út. (2 pont)



Ezért $\lambda(a, e) = 6$ és $\lambda(x, y) = 5$ teljesül minden más $\{a, b\}$ -től különböző $\{x, y\}$ pontpárra. (1 pont)

Ezek szerint az ábrán látható fa nem csupán a pontpárok közötti élösszefüggőséget, hanem a minimális vágásokat is helyesen reprezentálja, az valóban GH-fája a kért gráfnak. (1 pont)

5. Legyenek a G gráf csúcsai az (x, y) rácspontok, ahol $1 \leq x \leq n$ ill. $1 \leq y \leq n$. G élei a szomszédos rácspontokat kötik össze, azaz (x, y) szomszédai $(x - 1, y)$, $(x + 1, y)$, $(x, y - 1)$ ill. $(x, y + 1)$ (amennyiben ezek G csúcsai). Tegyük fel, hogy G éleire úgy írtunk nemnegatív számokat, hogy G bármely v csúcsa esetén a v -re illeszkedő vízszintes élekre írt számok összege megegyezik a v -re illeszkedő függőleges élekre írt számok összegével. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok mindegyikét lehet úgy (felfelé vagy lefelé) kerekíteni, hogy ez utóbbi tulajdonság a kerekítés után is teljesüljön.

A G gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy a gráf lerajzolásakor keletkező $(n - 1) \times (n - 1)$ méretű sakktábla világos mezőinek élei pozitív, sötét mezőinek élei pedig negatív körüljárással legyenek körbeírányítva. Ekkor ha G egy v csúcsába egy vízszintes él befelé mutat, akkor minden vízszintes él befelé mutat G -be, és minden függőleges kifelé, ha pedig egy vízszintes kifelé mutat, akkor minden vízszintes kifelé és minden függőleges befelé. (4 pont)

Vegyünk fel még egy izolált s és t csúcsot. Az így kapott hálózatban az élekre írt számok egy megengedett st -folyamot írnak le. (1 pont)

Alkalmazhatjuk a tanult folyamkerekítési lemmát. Ha ennek megfelelően kerekítjük az élekre írt számokat, akkor minden élre az eredetileg odaírt szám felfelé vagy lefelé kerekített változata kerül, és a vízszintes élekre írt számok összege meg fog egyezni a függőleges élekre írtakéval. Nekünk pontosan ilyen kerekítés létezését kellett igazolnunk. (5 pont)

Természetesen működik az órai bizonyítás lemásolása is, amikoris törtélekből álló kört keresünk, és annak a mentén javítunk minden lépésben.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf éleit úgy színeztük ki az $1, 2, \dots, k$ színekkel, hogy G azonos színű éleinek nincs közös csúcsa. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $c(e) < c(f)$ teljesül egy v csúcsból induló e és f él színeire, akkor $e \prec_v f$, azaz v számára az e él jobb, mint az f él. Bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan egy stabil párosítása van.

A G gráfnak biztosan van stabil félpárosítása, amit pl az Irving-algoritmussal kaphatunk meg. (2 pont)

Ha ez nem stabil párosítás, akkor bizonyosan tartalmaz olyan $\frac{1}{2}$ súlyú éleket, amelyek páratlan hosszúságú preferenciakört alkotnak. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy egyáltalán nincs preferenciakör G -ben. Ebből nem csak az következik, hogy minden stabil félpárosítás valójában stabil párosítás, hanem az is, hogy a stabil párosítás egyértelmű, hiszen bármely két stabil párosítás szimmetrikus különbsége preferenciakörökből áll. (2 pont)

Tfh, hogy $v_1, v_2, \dots, v_k$ a G egy preferenciaköre, azaz $v_1v_2 \succ_{v_2} v_2v_3 \succ_{v_3} v_3v_4 \succ_{v_4} \dots \succ_{v_k} v_kv_1$. (1 pont)

Ekkor $c(v_1v_2) > c(v_2v_3) > \dots > c(v_kv_1) > c(v_1v_2)$, ami ellentmondás, és ezzel az állítást igazoltuk. (3 pont)

Az éltörlési lemmával is dolgozhatunk.

Az 1-es színű élek a csúcsaik legjobb élei, ezért az éltörlési lemma miatt minden olyan nem 1-es színű él törölhető, aminek van 1-es színű éllel közös csúcsa. (3 pont)

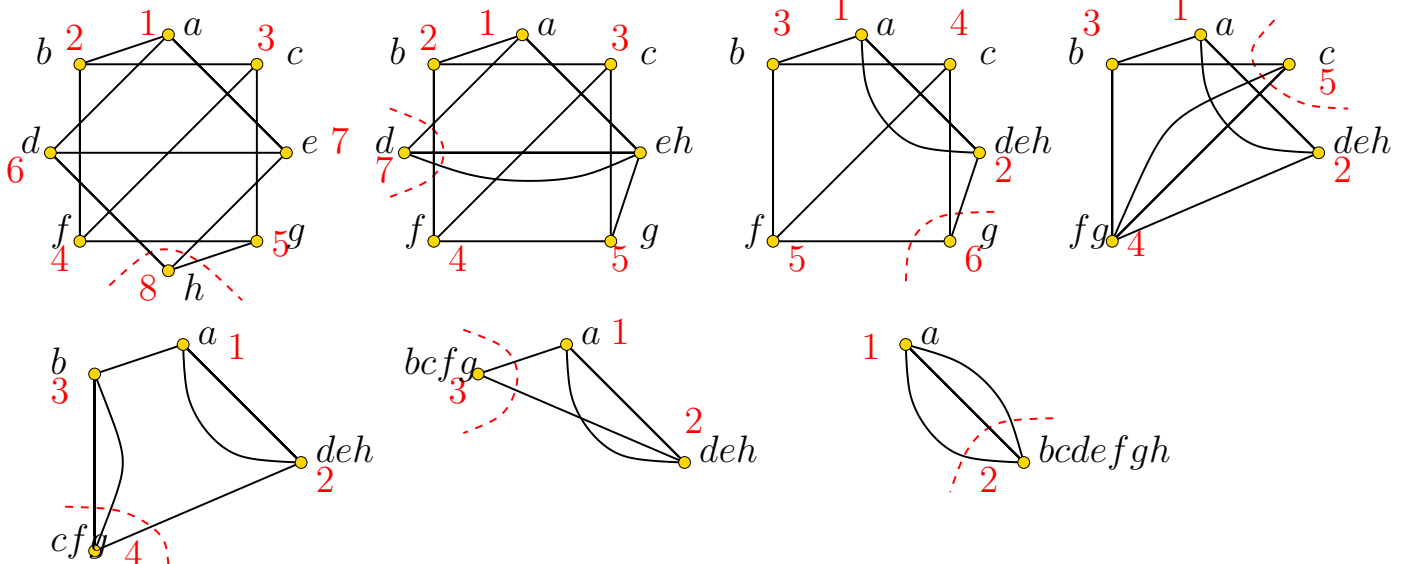
Miután ezeket az éltörléseket elvégeztük, az 1-es színű élek önálló komponenseket alkotnak. (2 pont)

Ezt követően ugyanez elmondható a 2-es színű, majd a 3-as színű, stb élekről. (3 pont)

Tehát ha már tudunk az éltörlési lemmával további élt törölni, akkor a kapott G' gráf élei egy párosítást alkotnak. (1 pont)

Mivel az éltörlési lemma szerint végzett éltörlés nem változtat a stabil párosítások halmazán, ezért a kapott G' gráf élhalmaza a G és így a kiindulási G gráfnak is az egyetlen stabil párosítása. (1 pont)

2. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor többféle csúcs közül választhatunk, mindig az ABC-ben legelső lehetőséget választjuk.



Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli névsormegkötéssel, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó

csúcsa lesz.

(3 pont)

Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A piros számok a maxvissza sorrendet, a szaggatott vonal a vágásjelöltet mutatják.

(6 pont)

Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben a $\{b, c, f, g\}$ ill. az $\{a, d, e, h\}$ csúcsok között futó két élből áll.

(1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a 101 csúcsú összefüggő G gráf minden e éle esetén a G maximális méretű párosításai között van olyan, ami e -t tartalmazza, és található olyan is, ami nem tartalmazza e -t. Igazoljuk, hogy az Edmonds-Gallai felbontásban szereplő $A(G)$ független ponthalmaz és $C(G) = \emptyset$.

Mivel G -nek 101 csúcsa van, ezért $D(G) \neq \emptyset$. Ha $D(G) = V(G)$, akkor az állítás triviális. Feltehetjük tehát, hogy $D(G) \neq \emptyset$, így G összefüggősége folytán $A(G) \neq \emptyset$.

(1 pont)

Maximális párosításban minden $A(G)$ -beli csúcs párja $D(G)$ -beli, ezért $A(G)$ által feszített él nem lehet maximális párosításban, ilyen él tehát nincs.

(3 pont)

Szintén nincs $A(G)$ és $C(G)$ között vezető él, hisz ilyen él sem szerepelhet G maximális párosításában.

(3 pont)

Ezért ha $C(G)$ nemüres, akkor G nem összefüggő.

(2 pont)

Ezek szerint $C(G) = \emptyset$ és $A(G)$ csakugyan független ponthalmaz G -ben.

(1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy minden irányítatlan gráfnak találhatók olyan u, v különböző csúcsai, amire az uv él behúzásával kapott $G' = G + uv$ gráf tetszőleges x, y csúcsaira teljesül, hogy $\lambda_{G'}(x, y) = \lambda_G(x, y)$, kivéve $\lambda_{G'}(u, v) = \lambda_G(u, v) + 1$.

Legyen uv a G gráf Gomory-Hu fájának egy legnagyobb vágást meghatározó éle.

(2 pont)

Ha a G gráfba behúzzunk egy uv élt, akkor ettől $\lambda(u, v)$ 1-gyel növekszik, és G minden u -t és v -t szeparáló minimális vágása u -t és v -t szeparáló minimális vágás marad az élbehúzás után is.

(3 pont)

Bármely más x, y pontpárt tekintünk G -ben, a G gráf GH-fája reprezentál olyan x -et és y -t szeparáló minimális vágást, ami nem szeparálja az u és v csúcsokat.

(3 pont)

Ezért az uv él behúzása után az ilyen pontpárok élösszefüggősége nem változik.

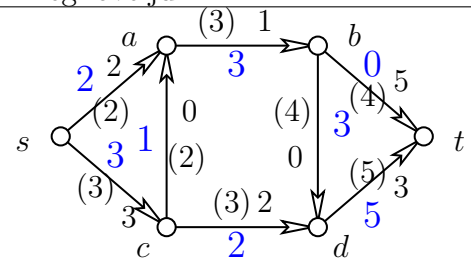
(1 pont)

Ez igazolja a feladat állítását.

(1 pont)

Tkp azt bizonyítottuk, hogy ha behúzzuk G -be a GH-fa legdrágább élét, akkor az új gráf GH-fáját megkaphatjuk G GH-fájából úgy, hogy a behúzott élre írt számot 1-gyel megnöveljük.

5. Van-e olyan minimális költségű st -folyam az ábrán látható hálózatban, aminek optimalitását bizonyítja az a π potenciál, amelyre $\pi(s) = 0, \pi(a) = \pi(c) = 3, \pi(b) = \pi(d) = 5$ valamint $\pi(t) = 9$?



(A zárójelben álló számok kapacitást, az önmagukban állók pedig költséget jelentenek.)

Az optimalitási kritérium szerint ha egy x folyam esetén teljesül, hogy az olcsó élek telítettek, és a drágákon pedig 0 folyam folyik, akkor x minimális költségű folyam.

(2 pont)

Olcsó élek az sa, ab, dt , drága él pedig egyedül a bt .

(2 pont)

Ezért ha az x folyamra és a π potenciálra teljesülnek az optimalitási kritérium, akkor $x(sa) = 2, x(ab) = 3, x(dt) = 5$ és $x(bt) = 0$.

(2 pont)

A Kirchhoff-szabály miatt ekkor $x(ca) = 1, x(bd) = 3, x(cd) = 2$ és $x(sc) = 3$.

(2 pont)

Ezzel minden élhez meghatároztuk a hozzá tartozó folyamértéket, és egyúttal egy olyan megengedett x folyamat kaptunk,

(1 pont)

ami a feladatban megadott π potenciállal együtt teljesíti az optimalitási kritériumot. Ezért a feladat kérdésére igenlő a válasz.

(1 pont)

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2024. 05. 16.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám csak részben jár. Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden éle vagy piros vagy zöld, és G -ben minden páratlan kör tartalmaz piros és zöld élt is. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden piros él megelőz minden zöld élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek bizonyosan van stabil párosítása.

A G gráfnak biztosan van stabil félpárosítása, amit pl az Irving-algoritmussal kaphatunk meg. (1 pont)
Ha ez nem stabil párosítás, akkor bizonyosan tartalmaz olyan $\frac{1}{2}$ súlyú éleket, amelyek páratlan hosszúságú preferenciakört alkotnak. (2 pont)

Indirekt igazoljuk, hogy G -ben nincs páratlan preferenciakör. Tfh u.i., hogy $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ egy ilyen C kört alkotnak, azaz $v_1v_2 \prec_{v_2} v_2v_3 \prec_{v_3} v_3v_4 \prec_{v_4} \dots \prec_{v_{2k+1}} v_{2k+1}v_1$. (2 pont)

Mivel C -nek a feltevés miatt van piros és zöld éle is, ezért van olyan, hogy $v_{i-1}v_i$ zöld, v_iv_{i+1} pedig piros. Ekkor azonban $v_iv_{i-1} \preceq_{v_i} v_iv_{i+1}$, ami ellentmondás (4 pont)

Nincs tehát G -ben páratlan hosszúságú preferenciakör, ezért G minden stabil félpárosítása valójában stabil párosítás. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

2. megoldás (Az éltörlési lemma segítségével)

Az éltörlési lemmával töröljük G -ből annyi élt, amennyit csak lehet. Ha már nem lehet így további élt törölni, akkor a kapott G' gráf bármely $e = uv$ élére a tanultak szerint teljesül, hogy e pontosan akkor a legjobb éle u -nak, ha e a legrosszabb éle v -nek. (3 pont)

Tekintsük G' -ben a csúcsok legjobb éleinek L halmazát! A fent említett tulajdonság miatt L megegyezik a csúcsok legrosszabb éleinek halmazával. (1 pont)

Minden (nemizolált) csúcsra pontosan egy legjobb és egy legrosszabb él illeszkedik, ezért G' minden komponense vagy egyetlen L -beli él vagy L -beli élek alkotta diszjunkt preferenciakörök feszítette gráf. (1 pont)

Legyen pl $v_1, v_2, \dots, v_k$ egy ilyen preferenciakör, azaz $v_1v_2 \prec_{v_2} v_2v_3 \prec_{v_3} v_3v_4 \prec_{v_4} \dots \prec_{v_k} v_kv_1$. (1 pont)

Az élek színezésére vonatkozó szabály miatt a preferenciakörben zöld él nem követhet pirosat, ezért minden ilyen kör vagy csupa piros, vagy csupa zöld élből áll. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy G' tetszőleges v csúcsára a v -ből induló legjobb ill. legrosszabb él ugyanolyan színű. (1 pont)

Ezért a G' gráf bármelyik komponense csak egyféle színű élt tartalmaz, vagyis G' minden komponense – ekkor persze maga G' is – páros gráf. (1 pont)

A Gale-Shapley-tétel miatt G' -nek létezik egy M stabil párosítása, és az éltörlési lemma miatt M a G -nek is stabil párosítása. (1 pont)

3. megoldás (A Gale-Shapley-tétel alapján)

Tekintsük a piros élek alkotta G' részgráfot. A feltétel miatt ez páros gráf, van tehát stabil párosítása, mondjuk M_P . (3 pont)

Ez az M_P párosítás G -ben dominál minden piros élt, és minden olyan zöld élt is, aminek van M_P által fedett végpontja. (2 pont)

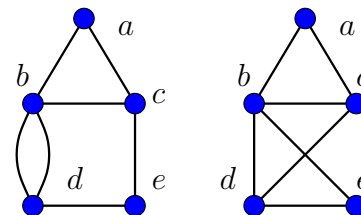
Legyen G'' a G azon feszítő részgráfja, amit az M_P csúcsai által le nem fogott (mint láttuk zöld) élek határoznak meg. A feladatbeli feltétel miatt G'' páros gráf, ezért a Gale-Shapley-tétel miatt van stabil párosítása, mondjuk M_Z . (3 pont)

A konstrukció folytán $M = M_P \cup M_Z$ a G olyan párosítása, ami G minden M -től különböző élet dominálja. Más szóval M a G stabil párosítása, nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, összefüggő gráf bármely maxvissza sorrendjének megfordítása szintén maxvissza sorrendje G -nek. Mutassuk meg, hogy G reguláris.

Az tanították, hogy ha egy maxvissza sorrend u, v -re végződik, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$. (2 pont)
A feladat feltétele miatt ezért ha egy maxvissza sorrend v, u -val kezdődik, akkor szintén fennáll a $\lambda(u, v) = d(v)$ összefüggés. (3 pont)
Mivel G egyszerű és összefüggő, ezért tetszőleges uv él esetén van olyan maxvissza sorrend, amiben az első két csúcs u és v . (3 pont)
Azt kaptuk, hogy tetszőleges $uv \in E(G)$ esetét $d(v) = \lambda(u, v) = \lambda(v, u) = d(u)$, (1 pont)
innen pedig G összefüggősége miatt G regularitása adódik. (1 pont)

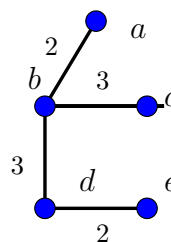
3. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható gráf egy Gomory-Hu fáját! Van-e a bal oldali ábrán látható gráfnak olyan Gomory-Hu fája, ami a jobb oldali gráfnak is Gomory-Hu fája?



A cbd -út éleinek elhagyásával mindkét megadott gráfnak egy-egy Hamilton körét kapjuk. Ezért a b, c és d csúcsok közül bármely kettő között vezet három páronként éldiszjunkt út, bármely más csúcspár között pedig két élidegen út is vezet. (4 pont)

Figyeljük meg, hogy az oldalt látható Gomory-Hu fán bárhogy is választok két csúcsot, a két csúcs között a Gomory-Hu fa olyan minimális vágást határoz meg, aminek a nagysága megegyezik a megadott gráfokban a lokális élösszefüggőség fenti alsó becslésével. (4 pont)

Ez azt jelenti, hogy az alábbi Gomory-Hu fa mindkét megadott gráfnak Gomory-Hu fája, így a feladat kérdésére igenlő a válasz. (2 pont)



4. Nevezzük a G gráfot *duplán faktorkritikusnak* (rövidítve *DFK*), ha G bármely csúcsát elhagyva faktorkritikus gráfot kapunk. Igazoljuk, hogy ha G faktorkritikus gráf, akkor DFK az a G' gráf, amit a G -ből egy új csúcs (apex) hozzáadásával kapunk, amit G minden csúcsával összekötünk.

Azt kell megmutatni, hogy bárhogy is hagyunk el G' -ből két csúcsot, a kapott gráfnak van teljes párosítása. (2 pont)

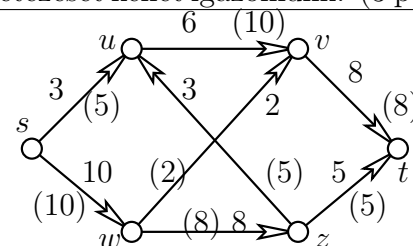
Ha az egyik elhagyott csúcs az apex, akkor voltaképp G -ből hagyunk el egy csúcsot, így G faktorkritikus volta miatt a kapott gráfnak van teljes párosítása. (3 pont)

Ha pedig az eredeti G gráf két csúcsát (mondjuk u -t és v -t) hagyjuk el, akkor G faktorkritikussága miatt $G - u - v$ -nak van egy M teljes párosítása. (2 pont)

Ha most elhagyjuk a v csúcsot is, és a v csúcs M -beli párját az apexhez kötjük be, akkor M -ből a $G' - u - v$ egy teljes párosítását kapjuk. Nekünk pedig pontosan egy ilyen párosítás létezését kellett igazolnunk. (3 pont)

5. Létezik-e a G gráf élein olyan $c > 0$ költségfüggvény, amire a (G, s, t, g) hálózatban az ábrán megadott x folyam minimális költségű?

(A zárójelben álló számok a kapacitásokat, az önmagukban állók pedig az élen folyó folyamat jelölik.)



Ha az x folyam minimális költségű, akkor tartozik hozzá olyan nemnegatív π potenciál a csúcsokon, amelyre $\pi(s) = 0$ és amelyre minden drága élen (aminek a költsége több a potenciálugrásnál) 0 folyam folyik, és minden olcsó él (ahol az élköltség kisebb a potenciálugrásnál) telített. (3 pont)

Ha tehát olyan a költségfüggvény és a potenciál, hogy minden él költsége megegyezik az adott él mentén a potenciálugrással, akkor bármely megengedett folyam minimális költségű. (2 pont)

Mivel minden élköltségnek pozitívnak kell lennie, ezért ha úgy választunk potenciált, hogy minden él mentén pozitív legyen a potenciálugrás, akkor ezt a feltételt is könnyű teljesíteni. (2 pont)

A G gráf DAG, csúcsainak egy topologikus sorrendje pedig s, c, d, a, b, t . Legyen minden csúcs potenciálja az adott csúcs iménti sorrendben elfoglalt helyénél 1-gyel kisebb szám, és legyen minden él költsége az adott él által megvalósított potenciálugrás. Ilyen választás mellett a gráfnak nincs sem olcsó sem drága éle, ezért az imént definiált költségre minden megengedett folyam, így speciálisan x is minimális költségű. (7 pont)

A teljes megoldáshoz nem szükséges a 2+2 pontos rész. Ha tehát valaki ezek valamelyikére pontot kap, akkor az utolsó részre elérhető pontszáma ennyivel csökken.

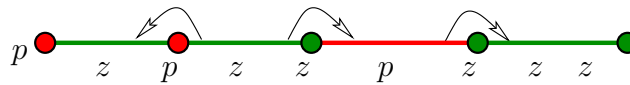
Az eredeti ábra hibás volt, dolgozatírás közben tisztáztuk.

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH javítókulcs (2024. 05. 16.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám csak részben jár. Természetesen az ismerttetektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa és minden éle vagy piros vagy zöld, és G -ben minden páratlan kör tartalmaz piros és zöld élt is. Tegyük fel továbbá, hogy a G minden v csúcsához tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden v -vel azonos színű csúcsba futó él megelőz minden v -től különböző színű csúcsba futó élt, az azonos színű csúcsokba futó élek között pedig a v színével azonos színű élek megelőznek minden v színétől különböző színű élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek bizonyosan van stabil párosítása. (A példagráf a preferenciára vonatkozó szabályt illusztrálja.)



A G gráfnak biztosan van stabil félpárosítása, amit pl az Irving-algoritmussal kaphatunk meg. (1 pont)

Ha ez nem stabil párosítás, akkor tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú preferenciakört. (2 pont)

Indirekt igazoljuk, hogy G -ben nincs páratlan preferenciakör. Tfh u.i., hogy $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ egy ilyen C kört alkotnak, azaz $v_1v_2 \prec_{v_2} v_2v_3 \prec_{v_3} v_3v_4 \prec_{v_4} \dots \prec_{v_{2k+1}} v_{2k+1}v_1$. Ha egy ilyen páratlan preferenciakörnek van piros és zöld csúcsa is, akkor van három egymást követő csúcs, amelyek közül az első kettő azonos, a harmadik pedig ettől különböző színű. Ekkor a második csúcs az elsőhöz vezető élt preferálja a harmadikhoz vezetővel szemben, ami ellentmond a ciklikus preferenciáknak. (3 pont)

Ha pedig a preferenciakör minden csúcsa azonos színű, akkor a feladatbeli feltevés miatt a kör mindkétféle színű élből tartalmaz, így lesz a körön két egymást követő él, amik közül az első színe megegyezik a kör csúcsainak színével, a másodiké pedig különbözik attól. Ekkor a két él közös csúcsa a ciklikus sorrendben korábbi élt preferálja, ami ismét ellentmond a feltevésünknek. (3 pont)

Nincs tehát G -ben páratlan hosszúságú preferenciakör, ezért G minden stabil félpárosítása valójában stabil párosítás. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

2. megoldás (Az éltörlési lemma segítségével)

Az éltörlési lemmával töröljünk G -ből annyi élt, amennyit csak lehet. Ha már nem lehet így további élt törölni, akkor a kapott G' gráf bármely $e = uv$ élére a tanultak szerint teljesül, hogy e pontosan akkor a legjobb éle u -nak, ha e a legrosszabb éle v -nek. (3 pont)

Tekintsük G' -ben a csúcsok legjobb éleinek L halmazát! A fent említett tulajdonság miatt L megegyezik a csúcsok legrosszabb éleinek halmazával. (1 pont)

Minden (nemizolált) csúcsra pontosan egy legjobb és egy legrosszabb él illeszkedik, ezért G' minden komponense vagy egyetlen L -beli él vagy L -beli élek alkotta diszjunkt preferenciakörök feszítette gráf. (1 pont)

Legyen pl $v_1, v_2, \dots, v_k$ egy ilyen preferenciakör, azaz $v_1v_2 \prec_{v_2} v_2v_3 \prec_{v_3} v_3v_4 \prec_{v_4} \dots \prec_{v_k} v_kv_1$. (1 pont)

Ha itt v_i és v_{i+1} azonos színűek, akkor ennek a körnek, sőt e kör komponensének minden csúcsának ugyanilyen színűnek kell lennie. Ha egy komponensben van két különböző színű csúcsot összekötő él, akkor ezen csúcsokon átmenő preferenciakörben is minden él különböző színű csúcsot köt össze, és ugyanez az egész komponensen belül is igaz. (1 pont)

Ezért G minden komponense vagy egyszínű csúcsokból és ugyanilyen színű élekből, vagy egyszínű csúcsokból és ellentétes színű élekből áll, vagy a komponens minden éle ellentétes színű csúcsokat köt össze. (1 pont)

Így aztán G' minden komponense – így persze maga G' is – páros gráf. (1 pont)

A Gale-Shapley-tétel miatt G' -nek létezik egy M stabil párosítása, és az éltörlési lemma miatt M a G -nek is stabil párosítása. (1 pont)

3. megoldás (A Gale-Shapley-tétel alapján)

Tekintsük a piros csúcsok feszítette piros élek alkotta G_p és a zöld csúcsok feszítette zöld élek alkotta G_z részgráfokat. A feltétel miatt $G_p \cup G_z$ is páros gráf, van tehát stabil párosítása, mondjuk M . (2 pont)

Ez az M párosítás dominálja G minden olyan élt, aminek van M -beli éllel közös csúcsa. (1 pont)

Alkossák a G' gráfot az M -mel közös csúccsal nem rendelkező olyan élek, amelyek két piros vagy két zöld csúcsot kötnek össze. A feladatbeli feltétel miatt G' páros gráf, ezért a Gale-Shapley-tétel miatt van stabil párosítása, mondjuk M' . (2 pont)

A feladatban kikötött feltétel miatt M' dominál minden olyan M által dominálatlan élt, aminek közös csúcsa van M' -vel. (2 pont)

Alkossák a G'' gráfot a piros és zöld csúcsokat összekötő, $M \cup M'$ -vel közös csúccsal nem rendelkező élek. Mivel G'' páros gráf, ezért van egy M'' stabil párosítása. (2 pont)

A konstrukció folytán $M \cup M' \cup M''$ a G olyan párosítása, ami G minden másik élet dominálja. Más szóval M a G stabil párosítása, nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van $(\dots, v_1, v_2)$ -re, $(\dots, v_2, v_3)$ -ra, stb, $(\dots, v_{n-1}, v_n)$ -re, valamint $(\dots, v_n, v_1)$ -re végződő maxvissza sorrendje is. Igazoljuk, hogy G reguláris.

Az tanították, hogy ha egy maxvissza sorrend u, v -re végződik, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$. (2 pont)

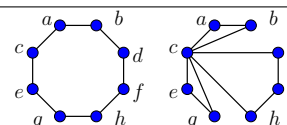
Ebből adódik, hogy $\lambda(v_i, v_{i+1}) = d(v_{i+1})$ teljesül minden i -re, ahol az összeadást mod n értjük. (2 pont)

Ezen kívül az is igaz, hogy $d(v_i) \geq \lambda(v_i, v_{i+1})$, hiszen a v_i -ből induló élek szeparálják v_i -t v_{i+1} -től. (3 pont)

Ezek szerint $d(v_1) \geq \lambda(v_1, v_2) = d(v_2) \geq \lambda(v_2, v_3) = d(v_3) \geq \dots \geq d(v_n) \geq \lambda(v_n, v_1) = d(v_1)$. (1 pont)

Sehol nem állhat tehát a fenti láncban szigorú egyenlőtlenség, így aztán $d(v_1) = d(v_2) = \dots = d(v_n)$, azaz G csakugyan reguláris. (1 pont)

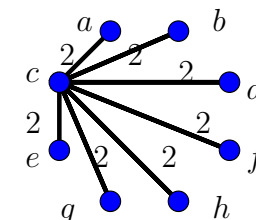
3. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható gráf egy Gomory-Hu fáját! Van-e a bal oldali ábrán látható gráfnak olyan Gomory-Hu fája, ami a jobb oldali gráfnak is Gomory-Hu fája?



Mindkét megadott gráfnak van Euler-körsétája, ezért igaz, hogy bármely két csúcs között vezet két élidegen út. (3 pont)

Figyeljük meg, hogy az alábbi Gomory-Hu fán bármely két csúcs között a Gomory-Hu fa olyan olyan vágást határoz meg, aminek a két oldala között mindkét megadott gráfban két él fut. (4 pont)

Ez azt jelenti, hogy az alábbi Gomory-Hu fa mindkét megadott gráfnak Gomory-Hu fája, így a feladat kérdésére igenlő a válasz. (2 pont)



4. Tegyük fel, hogy a G gráfnak három komponense van, mégpedig G_1 , G_2 és G_3 , amelyek mindegyike faktorkritikus gráf. Mutassuk meg, hogy a G gráf tetszőleges $u_1, v_1 \in V(G_1)$, $u_2, v_2 \in V(G_2)$ és $u_3, v_3 \in V(G_3)$ esetén a $G' = G + u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1$ gráf szintén faktorkritikus.

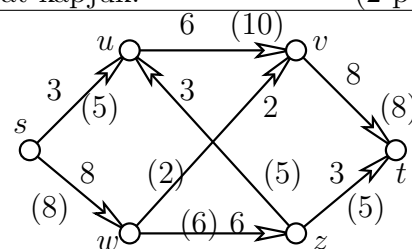
Azt kell megmutatni, hogy bárhogyan is hagyunk el G -ből egy v csúcsot, a kapott gráfnak van teljes párosítása. (2 pont)

Feltehető, hogy $v \in V(G_1)$. Ekkor G_1, G_2 és G_3 faktorkritikussága miatt van a $G_1 - v$, (2 pont)

a $G_2 - u_2$ ill. $G_3 - v_3$ gráfoknak teljes párosítása. (4 pont)

E párosításokhoz az u_2v_3 élt hozzáadva a $G - v$ gráf egy teljes párosítását kapjuk. (2 pont)

5. Van-e olyan 13 nagyságú st -folyam az ábrán látható hálózatban, ami minimális költségű minden olyan c költségfüggvény mellett, amire az ábrán feltüntetett st -folyam minimális költségű? (A zárójelben álló számok a kapacitásokat, az önmagukban állók pedig az élen folyó folyamat jelölik.)



Tegyük fel, hogy a megadott x folyam a c ktfv-re minimális költségű. Ezért tartozik hozzá olyan nemnegatív π potenciál a csúcsokon, amelyre minden drága élen 0 folyam folyik, és minden olcsó él telített, a többi élre nincs megkötés. (3 pont)

Ha tehát az x folyamat csak a pozitív folyamat hordozó, telítetlen éleken változtatjuk, akkor az x minimális költségű tulajdonságát igazoló π potenciál a megváltoztatott x' folyam minimális költségű tulajdonságát is bizonyítja. (3 pont)

Az x -hez tartozó segédgráfban $suzt$ olyan javító út, ami kizárólag pozitív folyamat hordozó, telítetlen élekből áll. Ennek az útnak a mentén el tudunk küldeni s -ből t -be még további 2 egységnyi folyamat. (2 pont)

Ezáltal egy 13 nagyságú st -folyamatot kapunk, ami a korábbi megfigyelésünk szerint a c költségfüggvény mellett továbbra is minimális költségű marad. A feladat kérdésére tehát igenlő a válasz. (2 pont)