

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ill. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a G teljes páros gráf színosztályai és minden $1 \leq i \leq n$ ill. $1 \leq j < k \leq n$ esetén $v_i u_j \leq_{v_i} v_i u_k$ teljesül. (Azaz a V színosztály csúcsainak preferenciái az U színosztályon ugyanazt a rendezést adják.) Hány stabil párosítása van G -nek?
2. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy $2 \cdot \Delta(G)$ színből álló L_e színlista. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható két szín az L_e színlistából úgy, hogy közös csúccsal rendelkező élekhez ne válasszunk azonos színt.
3. Legyenek a G gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_n$ valamint $v_1, v_2, \dots, v_n$ élei pedig $u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_{n-1} v_{n-1}$ valamint minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén fusson él u_i és u_j ill. v_i és v_j között. Lehet-e u_1 és v_1 (valamilyen sorrendben) a G csúcsainak alkalmas maxvissza sorrendjében az utolsó két csúcs?
4. Tegyük fel, hogy a G gráf bármely két különböző u, v csúcsára $\lambda(u, v) = 42$ teljesül. Hogyan kapható meg a G minimális vágásait leíró kaktuszból a G gráf egy Gomory-Hu fája?
5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, ötödfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van olyan ux és vy éle, amelyre az ezen élek törlésével és egy xy él behúzásával létrejövő $G - ux - vy + xy$ gráf 4-szeresen élösszefüggő.

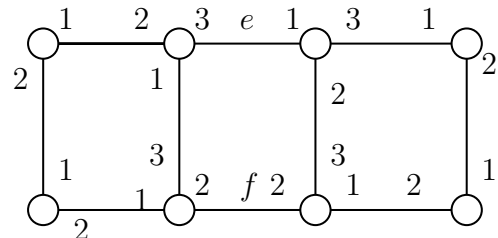
Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Változik-e attól a stabil párosítások száma, ha az ábrán látható gráfból töröljük (a) az e illetve (b) az f élt?



2. Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden egyes e éléhez adott egy $k(e)$ pozitív egész érték és egy legalább K színből álló L_e színlista, ahol $K = \max_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(v)} k(e)$. Igazoljuk, hogy minden e élhez választható $k(e)$ db szín az L_e színlistából úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező élekhez csupa különböző színt válasszunk.
3. Tegyük fel, hogy ha $\lambda(u, v) = d(v)$ teljesül a G egyszerű gráf két különböző u és v csúcsára, akkor a v csúcs bizonyosan a v_1 vagy v_2 csúcs valamelyike. Bizonyítsuk be, hogy ha $|V(G)| > 2$, akkor v_1 és v_2 nem szomszédosak G -ben.
4. Bizonyítsuk be, hogy minden véges, irányítatlan G gráfnak vannak olyan u és v különböző csúcsai, hogy a $G' = G + uv$ gráfra $\lambda_{G'}(x, y) = \lambda_G(x, y)$ teljesül minden olyan esetben amikor $\{x, y\} \neq \{u, v\}$.
5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u, v és w páronként nem szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy található e csúcsoknak két-két szomszédja úgy, hogy a $G - uu_1 - uu_2 - vv_1 - vv_2 - ww_1 - ww_2 + uu_1 + uu_2 + vv_1 + vv_2 + ww_1 + ww_2$ gráf 4-összefüggő marad. (6 élt törölünk, és 6-ot húzunk be.)

Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH 2020. V. 22. 12h

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő egyetlen pdf fájlt adjon be a moodle rendszerbe történő feltöltés útján. Erre a feltöltésre a dolgozatírás megkezdésétől a dolgozatírásra rendelkezésre álló idő leteltét követő 20 percig van lehetőség. A korábban feltöltött fájl ezen időszak alatt lecserélhető egy másikra. A feltöltött fájl neve **<Nev><Neptun>grafalgzh.pdf** legyen, ahol **<Nev>** a dolgozatot író hallgató vezeték- és keresztnéve ékezet ill. szóköz nélkül, **<Neptun>** pedig a neptun-kódja. Kizárólag abban az esetben, ha a feltöltés nem működik, a dolgozat beadható a **fleiner@cs.bme.hu** címre küldött e-mailben.

A dolgozat elkészíthető szövegszerkesztő program segítségével vagy befényképezett papírok pdf-re történő konverziójával is. Mindenki fontolja meg, nem jár-e jobban az első megoldással.

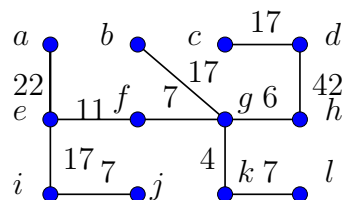
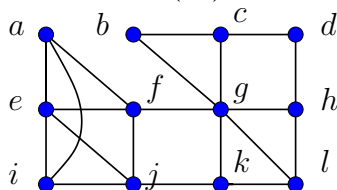
Bármilyen írásos segédeszköz ((elektronikus) könyv, jegyzet, statikus internetes tartalom) felhasználható a dolgozatírás ideje alatt. Tilos bármiféle interaktív segítség igénybevétele ill. tilos a dolgozatot író hallgatónak a dolgozat feladatairól a dolgozatírás időtartama alatt a tárgy előadójának feltett kérdéseken kívül más személlyel bármiféle kommunikációt folytatnia.

Minden egyes sorszámozott feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A $\star$ -gal jelölt feladat szorgalmi azok számára, akik a többit megoldották, és szívesen foglalkoznak egy nehezebb példával is. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az itt szerzett pontszám 40% súllyal számít az év végi osztályzatba. Részletek a tárgy honlapján: <http://cs.bme.hu/grafalg/>.

A dolgozatírás ideje alatt az oktatótól a Teams felületen lehet kérdezni, közvetlen híváskezdemenyvezéssel. Szerecsés esetben választ kap a kérdező.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G páros gráfnak $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ az egyik színosztálya, továbbá ha G két élére $ba_i \prec_b ba_j$ teljesül, akkor $i < j$. Bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan egy stabil párosítása van.
 2. Van-e a bal olali ábrán látható gráfnak olyan maxvissza sorrendje, amelyikben az utolsó két csúcs j és k ?
 3. A G gráfról azt tudjuk, hogy a Nagamochi-Ibaraki és a Karger algoritmus által megtalált minimális vágások különbözők. A fenti jobb oldali ábra G egy Gomory-Hu fáját mutatja. Határozzuk meg a Gomory-Hu fa fg éle által reprezentált G -beli vágás értékét.
 4. A lenti ábra mutatja a G gráf Gomory-Hu fáját, az fg élre most 42 van írva. Határozzuk meg, legkevesebb hány élt kell G -ből törölni ahhoz, hogy az így kapott gráfnak ne legyen semmiféle fűlfelbontása, azaz G -t ne lehessen egy csúcsból előállítani fülek egymás utáni felragasztásával.
 5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban minden $g(e)$ élkapacitás osztható 42-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha a z folyam nagysága 42 többszöröse, akkor van olyan z -vel azonos nagyságú z' folyam is ebben a hálózatban, amire $z(e)$ a G minden e éle esetén osztható 42-vel.
- $\star$ Tegyük fel, hogy G összefüggő, merevkörű, 99-reguláris gráf. Határozzuk meg G élkromatikus számát, $\chi'(G)$ -t.



Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő egyetlen pdf fájlt adjon be a moodle rendszerbe történő feltöltés útján. Erre a feltöltésre a dolgozatírás megkezdésétől a dolgozatírásra rendelkezésre álló idő leteltét követő 20 percig van lehetőség. A korábban feltöltött fájl ezen időszak alatt lecserélhető egy másikra. A feltöltött fájl neve **<Nev><Neptun>grafalgpzh.pdf** legyen, ahol <Nev> a dolgozatot író hallgató vezeté- és keresztnéve ékezet ill. szóköz nélkül, <Neptun> pedig a neptun-kódja. Kizárólag abban az esetben, ha a feltöltés nem működik, a dolgozat beadható a **fleiner@cs.bme.hu** címre küldött e-mailben.

A dolgozat elkészíthető szövegszerkesztő program segítségével vagy befényképezett papírok pdf-re történő konverziójával is. Mindenki fontolja meg, nem jár-e jobban az első megoldással.

Bármilyen írásos segédeszköz ((elektronikus) könyv, jegyzet, statikus internetes tartalom) felhasználható a dolgozatírás ideje alatt. Tilos bármiféle interaktív segítség igénybevétele ill. tilos a dolgozatot író hallgatónak a dolgozat feladatairól a dolgozatírás időtartama alatt a tárgy előadójának feltett kérdéseken kívül más személlyel bármiféle kommunikációt folytatnia.

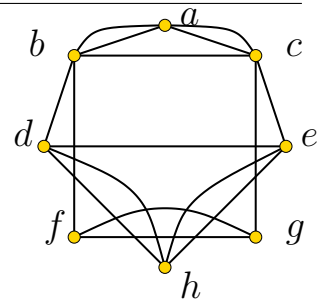
Minden egyes sorszámozott feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A $\star$ -gal jelölt feladat szorgalmi azok számára, akik a többit megoldották, és szívesen foglalkoznak egy nehezebb példával is. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az itt szerzett pontszám 40% súllyal számít az év végi osztályzatba. Részletek a tárgy honlapján: <http://cs.bme.hu/grafalg/>.

A dolgozatírás ideje alatt Fleiner Tamástól lehet kérdezni a Teams felületen, közvetlen híváskezdemenyvezéssel. Szerencsés esetben választ kap a kérdező.

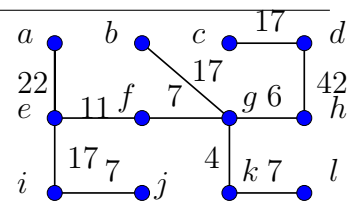
Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráfnak v olyan csúcsa, hogy G minden uv élére az uv él az u csúcs legrosszabb választása. Bizonyítsuk be, hogy ha uv egy M stabil párosítás éle, akkor az uv él a G minden stabil párosításában szerepel.
2. Tegyük fel, hogy $u_1, u_2, \dots, u_n$ és $v_1, v_2, \dots, v_n$ a G gráf két olyan maxvissza sorrendje, amire $u_{n-1} = v_n$ és $u_n = v_{n-1}$ teljesül, azaz a két utolsó csúcs ugyanaz, de fordított sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy $d(u_{n-1}) = d(u_n)$.

3. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig azt választjuk, amelyik ABC rendben a legelső lehet.



4. A mellékelt ábra mutatja a G gráf Gomory-Hu fáját. Határozzuk meg az fg él behúzásával létrejövő $G' = G + fg$ gráf egy Gomory-Hu fáját és a $\lambda_{G'}(a, k)$ ill. $\lambda_{G'}(b, i)$ értékeket.



5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban minden $g(e)$ élkapacitás egész szám és z egy olyan folyam, aminek m_z nagysága egész. Bizonyítsuk be, hogy létezik minden $z(e)$ értéknek olyan $z'(e)$ (felfelé vagy lefelé) kerekítése, amire z' is megengedett folyam marad, nagysága z -ével egyezik meg (azaz $m_z = m_{z'}$) és egy előre megadott f élre $z'(f) = \lceil z(f) \rceil$.

Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő egyetlen pdf fájlt adjon be a moodle rendszerbe történő feltöltés útján. Erre a feltöltésre a dolgozatírás megkezdésétől a dolgozatírásra rendelkezésre álló idő leteltét követő 10 percig van lehetőség. A korábban feltöltött fájl ezen időszak alatt lecserélhető egy másikra. Kizárólag abban az esetben, ha a feltöltés nem működik, a dolgozat beadható a fleiner@cs.bme.hu címre küldött e-mailben.

A dolgozat elkészíthető szövegszerkesztő program segítségével vagy befényképezett papírok pdf-re történő konverziójával is. Mindenki fontolja meg, nem jár-e jobban az első megoldással.

Bármilyen írásos segédeszköz ((elektronikus) könyv, jegyzet, statikus internetes tartalom) felhasználható a dolgozatírás ideje alatt. Tilos bármiféle interaktív segítség igénybevétele ill. tilos a dolgozatot író hallgatónak a dolgozat feladatairól a dolgozatírás időtartama alatt a tárgy előadójának feltett kérdéseken kívül más személlyel bármiféle kommunikációt folytatnia.

Minden egyes sorszámozott feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az itt szerzett pontszám 40% súllyal számít az év végi osztályzatba. Részletek a tárgy honlapján: <http://cs.bme.hu/grafalg/>.

A dolgozatírás ideje alatt az oktatótól a Teams felületen lehet kérdezni, közvetlen híváskezdemenykezéssel. Szerecsés esetben választ kap a kérdező.

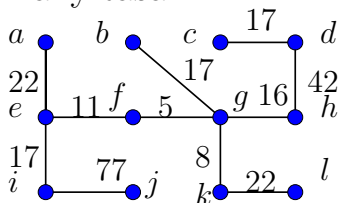
Feladatok

1. Jelölje a véges (de nem feltétlenül páros) G gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére. Határozzuk meg G csúcsainak fokszámát, és bizonyítsuk be, hogy G -nek van stabil párosítása.

2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G 4-élösszefüggő.

3. Nevezzük a G gráfot *duplán faktorkritikusnak* (rövidítve *DFK*), ha G bármely két csúcsát elhagyva, a keletkező gráfnak van teljes párosítása. Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 közös csúccsal nem rendelkező DFK gráfok. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 egy u_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy u_2 csúcsával és G_1 egy v_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy v_2 csúcsával, akkor az így kapott G gráf is DFK.

4. A G gráf Gomory-Hu-fája látható az ábrán. Határozzuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G -be ahhoz, hogy az így kapott G' gráfnak legyen 4-élösszefüggő irányítása.



5. Tegyük fel, hogy u és v a 4-szeresen élösszefüggő G negyedfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u és v kicserélhetnek két szomszédot a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával, azaz található u -nak két szomszédja (mondjuk a és b) illetve v -nek két szomszédja (mondjuk c és d) úgy, hogy a $G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vd$ gráf is 4-szeresen élösszefüggő.

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH 2021. V. 14. 12h

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő egyetlen pdf fájlt adjon be a moodle rendszerbe történő feltöltés útján. Erre a feltöltésre a dolgozatírás megkezdésétől a dolgozatírásra rendelkezésre álló idő leteltét követő 10 percre van lehetőség. A korábban feltöltött fájl ezen időszak alatt lecserélhető egy másikra. Kizárólag abban az esetben, ha a feltöltés nem működik, a dolgozat beadható a fleiner@cs.bme.hu címre küldött e-mailben.

A dolgozat elkészíthető szövegszerkesztő program segítségével vagy befényképezett papírok pdf-re történő konverziójával is. Mindenki fontolja meg, nem jár-e jobban az első megoldással.

Bármilyen írásos segédeszköz ((elektronikus) könyv, jegyzet, statikus internetes tartalom) felhasználható a dolgozatírás ideje alatt. Tilos bármiféle interaktív segítség igénybevétele ill. tilos a dolgozatot író hallgatónak a dolgozat feladatairól a dolgozatírás időtartama alatt a tárgy előadójának feltett kérdéseken kívül más személlyel bármiféle kommunikációt folytatnia.

Minden egyes sorszámozott feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az itt szerzett pontszám 40% súllyal számít az év végi osztályzatba. Részletek a tárgy honlapján: <http://cs.bme.hu/grafalg/>.

A dolgozatírás ideje alatt az oktatótól a Teams felületen lehet kérdezni, közvetlen híváskezdemenyvezéssel. Szerecsés esetben választ kap a kérdező.

Feladatok

1. Jelölje a G páros gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére. Bizonyítsuk be, hogy G minden e élet tartalmazza G egy alkalmas stabil párosítása.
2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf nem 4-élösszefüggő, és egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 5$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G -nek egyetlen egy háromélű vágása van.
3. Legkevesebb hány élt kell behúzni a $K_{n,n+1}$ teljes páros gráfba, hogy faktorkritikus gráfot kapjunk?
4. Bizonyítsuk be, hogy bármely n -pontú, irányítatlan, véges G gráfba behúzható $n - 1$ él úgy, hogy az így kapott G' gráfra $\lambda_{G'}(u, v) = \lambda_G(u, v) + 1$ teljesüljön G minden u, v csúcsára. (Párhuzamos él behúzása is megengedett.)
5. Tegyük fel, hogy az M $n \times m$ méretű mátrix minden eleme egy $\mathbb{R}^3$ -beli vektor, továbbá hogy a mátrix minden sorában és oszlopában az ott szereplő vektorok összege egész vektor, azaz $\mathbb{Z}^3$ eleme. Igaz-e, hogy az M mátrixban álló minden egyes vektor helyettesíthető egy egész vektorral úgy, hogy e cserék hatására egyetlen sor- illetve oszlopösszeg se változzon meg?

Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

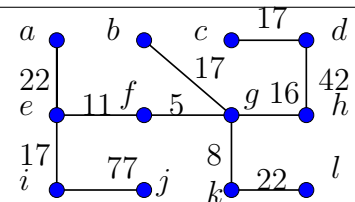
ZH 2022. V. 17. 12h

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa kék vagy sárga, és tegyük fel továbbá, hogy G minden páratlan köre tartalmaz kék és sárga csúcsot is. Tudjuk, hogy G minden v csúcsához olyan $\preceq_v$ lineáris rendezés tartozik a v -re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán amiben minden kék csúcsba futó él megelőz minden sárga csúcsba vezető élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek ezen preferenciák mellett van stabil párosítása.
2. Tegyük fel, hogy a legalább 3 csúcsú hurokélmentes, de nem feltétlenül egyszerű G gráfnak nincs két azonos fokszámú csúcsa. Igazoljuk, hogy van G -nek olyan csúcsa, ami G egyetlen maxvissza sorrendjében sem az utolsó.
3. Tegyük fel, hogy a G gráf minden $u \neq v$ csúcsához létezik G -nek olyan M_u maximális párosítása, ami nem fedi u -t. Bizonyítsuk be, hogy ha $G - v$ összefüggő, akkor G -nek olyan M_v maximális párosítása is van, ami v -t nem fedi.
4. Az ábrán a G gráf egy Gomory-Hu fája látható. Mennyi a $G' = G + jk$ gráfban a $\lambda_{G'}(a, d)$ lokális élösszefüggőség?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetszőleges mátrix, akkor A minden eleme kerekíthető úgy felfelé vagy lefelé, hogy A minden sor- és oszlopösszege is felfelé vagy lefelé kerekedjék.



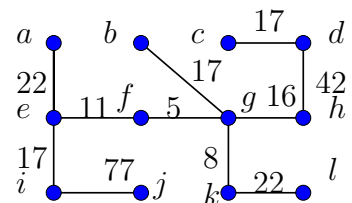
Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa piros vagy zöld, és tegyük fel továbbá, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros és zöld csúcsot is. Tudjuk, hogy G minden v csúcsához olyan $\preceq_v$ lineáris rendezés tartozik a v -re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán amiben minden v -vel azonos színű csúcsba futó él megelőz minden v -étől különböző színű csúcsba vezető élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek ezen preferenciák mellett van stabil párosítása.
2. Tegyük fel, hogy az n -pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkezés szerint G -nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros vagy zöld szín valamelyikével úgy, hogy a piros és a zöld élek alkotta részgráfok mindegyikének legyen fülfelbontása.
3. Tegyük fel, hogy a 999 csúcsú G gráf v csúcsa G minden más csúcsával össze van kötve, továbbá, hogy G -nek van olyan maximális méretű párosítása, ami nem fedi v -t. Legyen u a G egy v -től különböző csúcsa. Határozzuk meg $\nu(G - u)$ -t, azaz a $G - u$ gráf maximális párosításának méretét.
4. Az ábrán a G gráf egy Gomory-Hu fája látható. Tegyük fel, hogy $ih \in E(G)$. Határozzuk meg a $\lambda_{G'}(b, c)$ éllösszefüggőséget a hi él törlésével keletkező $G' = G - hi$ gráfban!
5. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, g) hálózatban a c költségfüggvényre nézve z_1 egy 42 nagyságú, 42 költségű, z_2 pedig egy 90 nagyságú, 102 költségű st -folyam. Bizonyítsuk be, hogy ebben a hálózatban a 66 nagyságú minimális költségű st -folyam költsége legfeljebb 77.



Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH 2023. V. 26. 12h

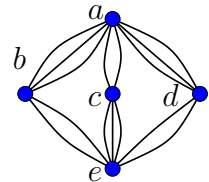
A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban** sem lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsait úgy színeztük ki az $1, 2, \dots, k$ színekkel, hogy G minden éle különböző színű csúcsokat köt össze. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $uv, uw \in E(G)$ és $c(v) < c(w)$, akkor $uv \prec_u uw$, azaz u számára az uv él jobb, mint az uw él. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van stabil párosítása.
2. Igazoljuk, hogy ha G k -reguláris gráf, akkor található G -ben k páronként éldiszjunkt út alkalmas u és v csúcsok között.
3. Tegyük fel, hogy a G gráf két komponensből áll: az egyik C_{42} , a másik K_{77} . Legkevesebb hány élt kell behúzni G -be ahhoz, hogy faktorkritikus gráfot kapjunk?

4. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf egy Gomory-Hu fáját!



5. Legyenek a G gráf csúcsai az (x, y) rácsponatok, ahol $1 \leq x \leq n$ ill. $1 \leq y \leq n$. G élei a szomszédos rácsponokat kötik össze, azaz (x, y) szomszédai $(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1)$ ill. $(x, y+1)$ (amennyiben ezek G csúcsai). Tegyük fel, hogy G éleire úgy írtunk nemnegatív számokat, hogy G bármely v csúcsa esetén a v -re illeszkedő vízszintes élekre írt számok összege megegyezik a v -re illeszkedő függőleges élekre írt számok összegével. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok mindegyikét lehet úgy (felfelé vagy lefelé) kerekíteni, hogy ez utóbbi tulajdonság a kerekítés után is teljesüljön.

Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

pZH 2023. VI. 2. 12h

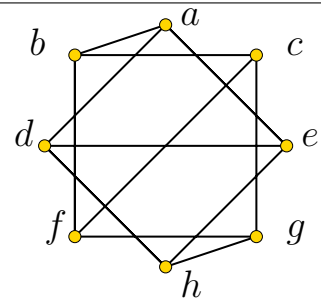
A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

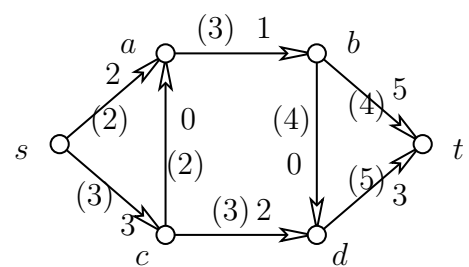
1. Tegyük fel, hogy a G gráf éleit úgy színeztük ki az $1, 2, \dots, k$ színekkel, hogy G azonos színű éleinek nincs közös csúcsa. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $c(e) < c(f)$ teljesül egy v csúcsból induló e és f él színeire, akkor $e \prec_v f$, azaz v számára az e él jobb, mint az f él. Bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan egy stabil párosítása van.

2. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor többféle csúcs közül választhatunk, mindig az ABC-ben legelső lehetőséget választjuk.



3. Tegyük fel, hogy a 101 csúcsú összefüggő G gráf minden e éle esetén a G maximális méretű párosításai között van olyan, ami e -t tartalmazza, és található olyan is, ami nem tartalmazza e -t. Igazoljuk, hogy az Edmonds-Gallai felbontásban szereplő $A(G)$ független ponthalmaz és $C(G) = \emptyset$.
4. Bizonyítsuk be, hogy minden irányítatlan gráfnak található olyan u, v különböző csúcsai, amire az uv él behúzásával kapott $G' = G + uv$ gráf tetszőleges x, y csúcsaira teljesül, hogy $\lambda_{G'}(x, y) = \lambda_G(x, y)$, kivéve $\lambda_{G'}(u, v) = \lambda_G(u, v) + 1$.

5. Van-e olyan minimális költségű st -folyam az ábrán látható hálózatban, aminek optimalitását bizonyítja az a π potenciál, amelyre $\pi(s) = 0, \pi(a) = \pi(c) = 3, \pi(b) = \pi(d) = 5$ valamint $\pi(t) = 9$?



(A zárójelben álló számok kapacitást, az önmagukban állók pedig költséget jelentenek.)

Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH 2024. V. 16. 12h

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

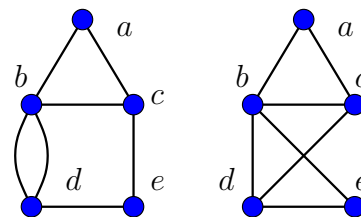
Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden éle vagy piros vagy zöld, és G -ben minden páratlan kör tartalmaz piros és zöld élt is. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden piros él megelőz minden zöld élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek bizonyosan van stabil párosítása.

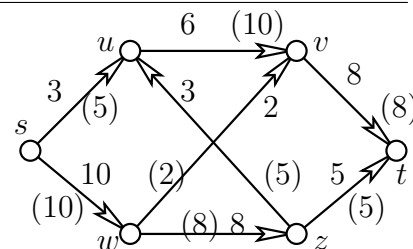
2. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, összefüggő gráf bármely maxvissza sorrendjének megfordítása szintén maxvissza sorrendje G -nek. Mutassuk meg, hogy G reguláris.

3. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható gráf egy Gomory-Hu fáját! Van-e a bal oldali ábrán látható gráfnak olyan Gomory-Hu fája, ami a jobb oldali gráfnak is Gomory-Hu fája?



4. Nevezzük a G gráfot *duplán faktorkritikusnak* (rövidítve *DFK*), ha G bármely csúcsát elhagyva faktorkritikus gráfot kapunk. Igazoljuk, hogy ha G faktorkritikus gráf, akkor DFK az a G' gráf, amit a G -ből egy új csúcs (apex) hozzáadásával kapunk, amit G minden csúcsával összekötünk.

5. Létezik-e a G gráf élein olyan $c > 0$ költségfüggvény, amire a (G, s, t, g) hálózatban az ábrán megadott x folyam minimális költségű?



(A zárójelben álló számok a kapacitásokat, az önmagukban állók pedig az élen folyó folyamot jelölik.)

Jó munkát!

Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

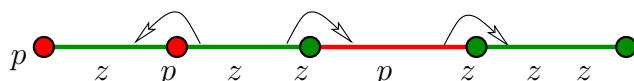
pZH 2024. V. 23. 12h

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel (ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írászeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-19 pont: sikertelen, 20-50 pont: sikeres. Az aláírás feltétele, hogy a ZH legalább 20 pontos legyen. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

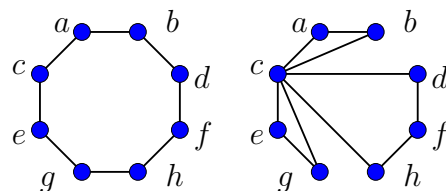
Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa és minden éle vagy piros vagy zöld, és G -ben minden páratlan kör tartalmaz piros és zöld élt is. Tegyük fel továbbá, hogy a G minden v csúcsához tartozó preferenciák olyanok, hogy abban minden v -vel azonos színű csúcsba futó él megelőz minden v -től különböző színű csúcsba futó élt, az azonos színű csúcsokba futó élek között pedig a v színével azonos színű élek megelőznek minden v színétől különböző színű élt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek bizonyosan van stabil párosítása. (A példagráf a preferenciára vonatkozó szabályt illusztrálja.)



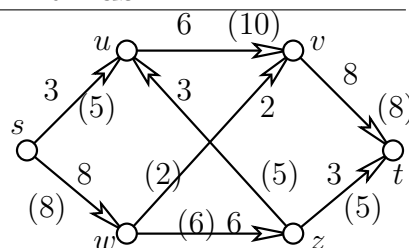
2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van $(\dots, v_1, v_2)$ -re, $(\dots, v_2, v_3)$ -ra, stb., $(\dots, v_{n-1}, v_n)$ -re, valamint $(\dots, v_n, v_1)$ -re végződő maxvissza sorrendje is. Igazoljuk, hogy G reguláris.

3. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható gráf egy Gomory-Hu fáját! Van-e a bal oldali ábrán látható gráfnak olyan Gomory-Hu fája, ami a jobb oldali gráfnak is Gomory-Hu fája?



4. Tegyük fel, hogy a G gráfnak három komponense van, mégpedig G_1 , G_2 és G_3 , amelyek mindegyike faktorkritikus gráf. Mutassuk meg, hogy a G gráf tetszőleges $u_1, v_1 \in V(G_1)$, $u_2, v_2 \in V(G_2)$ és $u_3, v_3 \in V(G_3)$ esetén a $G' = G + u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1$ gráf szintén faktorkritikus.

5. Van-e olyan 13 nagyságú st -folyam az ábrán látható hálózatban, ami minimális költségű minden olyan c költségfüggvény mellett, amire az ábrán feltüntetett st -folyam minimális költségű?



(A zárójelben álló számok a kapacitásokat, az önmagukban állók pedig az élen folyó folyamot jelölik.)

Jó munkát!