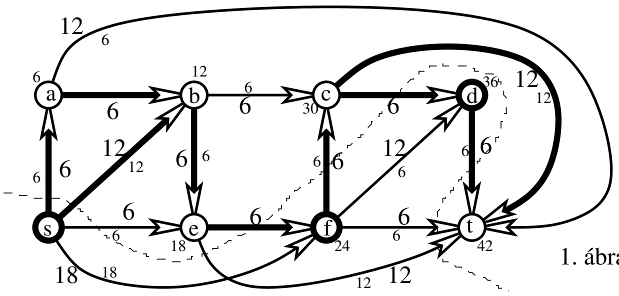
Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév

2. ZH javítókulcs

Az eredményeket legyetek szívesek emailben elküldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.



1. ábra

1. Az 1. ábrán látható diagram segítségével megadott Pert problémában mennyi az összetett feladat végrehajtásához szükséges minimális idő, és mik a kritikus tevékenységek?

   Az tanult módszerrel (mindig forrást választva) meghatározhatóak a legkorábbi kezdési idők (a csúcsok melletti számok jelzik) és az azokat meghatározó (vastag) élek. (4 pont)
   A kritikus tevékenységek azok, melyek csupa vastag élből álló st úton vannak. (3 pont)
   Ezek alapján minden tevékenység kritikus és a minimálisan szükséges idő 42. (3 pont)

2. Határozzunk meg az 1. ábrán megadott hálózatban egy maximális st-folyamot, és állapítsuk meg a maximális st-folyam értékét.

   A javító utak módszerével találunk egy folyamot, amit az élekre írt kis számok határoznak meg. (4 pont)
   E folyam értéke 42. (2 pont)
   Azért nincs ennél nagyobb folyam, mert a szaggatott vonallal jelzett vágás kapacitása szintén 42. (3 pont)
   A válasz tehát 42. (1 pont)
   (A vágást itt szerencsésebb egy csúcshalmazként megadni: a vastagított csúcsokból módosítatlan csúcsba vezető élek összkapacitása 42.)

3. Legfeljebb hány éle lehet egy 42-pontú, egyszerű, 7-kromatikus G gráfnak?

   Mivel G 7 színnel színezhető, ezért G nem tartalmaz K_8-cal izomorf részgráfot. (3 pont)
   Alkalmazhatjuk Turán tételét, azaz (2 pont)
   G-nek legfeljebb annyi éle van, mint $T_{42,7}$-nek. (3 pont)
   $T_{42,7}$ egy 42-pontú, 36-reguláris gráf, (1 pont)
   így élszáma $\frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 36 = 21 \cdot 36 = 756$, ami tehát egyúttal G élszámának is a maximuma. (1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < n \in \mathbb{Z}$, akkor n pozitív osztóinak szorzata $n^{\frac{d(n)}{2}}$, ahol $d(n)$ az n pozitív osztóinak számát jelöli.

   Azt bizonyítjuk be, hogy a pozitív osztók szorzatának négyzete $n^{d(n)}$. (1 pont)
   Tehát $\left(\prod_{0<d|n} d\right)^2 = \left(\prod_{0<d|n} d\right) \cdot \left(\prod_{0<d|n} d\right) = \left(\prod_{0<d|n} d\right) \cdot \left(\prod_{0<d|n} \frac{n}{d}\right) =$ (4 pont)
   $= \left(\prod_{0<d|n} d \cdot \frac{n}{d}\right) = \cdot \left(\prod_{0<d|n} n\right) =$ (3 pont)
   $= n^{d(n)}$ (2 pont)

5. 100 informatikus-hallgató jár bsz előadásra. Közülük azok a hallgatók, akiknek iv-t kell írniuk, az előadás végén bedobnak fejenként 42 db egyforintost egy automatába. Ez a gép a bedobott pénzt 128 forintonként rollnikba csomagolja. Végül 100 forint maradt rollnizatlan. Hány hallgatónak kell iv-znie?

   Ha x hallgató köteles iv-zni, akkor érvényes a $42x \equiv 100(128)$ kongruencia. (2 pont)
   2-vel osztáskor a modulust is osztva ekvivalens átalakítással $21x \equiv 50(64)$ adódik. (2 pont)
   Mivel $(64,3) = 1$, ezért a 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás: $63x \equiv 150(64)$. (2 pont)
   Innen $-x \equiv 22(64)$, azaz $x \equiv 42(64)$. (2 pont)
   Figyelembevéve, hogy $0 \leq x \leq 100$, $x = 42$ adódik, (1 pont)
   tehát a válasz 42. (1 pont)

6. Ha a G csoport nem ciklikus, akkor G-nek van legalább két különböző, legalább kételemű, ciklikus részcsoportja.

   Mivel G nem ciklikus, van az egységtől különböző g eleme, (2 pont)
   ami a $\langle g \rangle \leq G$ ciklikus részcsoportot generálja, (2 pont)
   Tehát $G \neq \langle g \rangle$, ezért van G-nek egy $h \notin \langle g \rangle$ eleme, (2 pont)
   amely által generált $\langle h \rangle \leq G$ részcsoport szintén ciklikus. (2 pont)
   Mivel $e \neq h \notin \langle g \rangle$, ezért a $\langle g \rangle$ és $\langle h \rangle$ ciklikus részcsoportok valóban különböznek és legalább kételeműek. (2 pont)

7. A vogonok ősi játéka, a macatucat a következőképpen zajlik. Először 12 vogon leül egy sorba, mindegyik a kedvenc énekesnője fényképével. A játék egy fordulójában a játékosok egymás után, sorban leteszik a náluk található fényképet, azaz az első vogonnál levő kép lesz a keletkező csomag alján, az utolsó vogoné pedig a tetején. Ezután kiosztják a fényképeket: először a leghájasabb vogon megkapja a csomagból a legfelső képet, majd a második legkövérebb a maradék kupac tetején levőt, stb. A kiosztás után újabb forduló kezdődik. A macatucat akkor ér véget, ha egy fordulóban az összes játékos a saját imádottja képét kapja vissza. Legfeljebb hány fordulós lehet a játék, ha a legnehezebb vogon ül az első helyen, és a legkönnyebb pedig a legutolsón? (A további vogonok sorrendjére nincs megkötés.)

A játék első fordulója után a fényképek elhelyezkedését egy $\sigma \in S_{12}$ permutáció írja le. (1 pont)
A k-dik forduló után a fényképek elhelyezkedése a σ^k permutációnak felel meg. (2 pont)
Ha a k-dik forduló után ér véget a játék, akkor k a legkisebb olyan pozitív egész, melyre $\sigma^k = id$, azaz k a σ rendje. (2 pont)
Minden fordulóban az első és utolsó vogon fényképet cserél. (1 pont)
A kérdés tehát az, hogy legfeljebb mekkora lehet egy olyan $\sigma \in S_{12}$ permutáció rendje, melynek van egy 2 hosszú ciklusa. (1 pont)
A tanultak alapján tudjuk, hogy a permutáció rendje a ciklushosszainak legkisebb közös többszöröse. (1 pont)
Legyenek σ ciklushosszai $2, n_1, n_2, \ldots n_l$. Világos, hogy $2 + n_1 + n_2 + \ldots n_l = 12$. (1 pont)
Könnyű ellenőrizni, hogy $[2, n_1, n_2, \ldots, n_l]$ akkor maximális, ha $l = 2$, és a ciklushosszok $2, 3$ és 7. Ekkor a rend 42, vagyis a válasz 42 . (1 pont)

8. Gyűrűt alkotnak-e (a szokásos polinomösszeadás és polinomszorzás műveletre) azok a p valós polinomok, melyeknek gyöke az $x = 42$?

A p polinomnak pontosan akkor gyöke a 42, ha $p(42) = 0$ (1 pont)
Az órán láttuk, hogy a valós polinomok gyűrűt alkotnak. Ezért csak azt kell ellenőrizni, hogy a műveletek (és az inverzképzés) nem vezet-e ki a fenti polinomok közül. (3 pont)
Ha $p(42) = q(42) = 0$, akkor $(p+q)(42) = p(42) + q(42) = 0$, vagyis az összeadás nem vezet ki. (2 pont)
A szorzásra ez $(pq)(42) = p(42) \cdot q(42) = 0 \cdot 0 = 0$ miatt szintén fennáll. (2 pont)
Mivel csak az összeadásra nézve kívánjuk meg a csoporttulajdonságot, az kell, hogy az ellentettképzésre is zárt a halmaz. Ha p ilyen polinom, akkor $(-p)(42) = -p(42) = 0$, tehát ez is rendben van. (2 pont)
(Az, hogy az összeadás egységeleme, a 0-polinom szintén ilyen, ellenőrizhető közvetlenül is, de az ellentettre ill. összeadásra való zártság miatt ez következik. (Ez a tény a 2. lépésben van implicite benne.))