Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév
1. ZH javítókulcs

Az eredményeket legyetek szívesek emailben elküldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

Legyenek a G_n gráf csúcsai az n-hosszú 0/1 sorozatok. Két sorozat között akkor fusson G_n-ben él, ha a két sorozat pontosan 2 helyen különbözik.

(Pl. a G_2 gráf csúcsai a $(0,0)$, a $(0,1)$, az $(1,0)$ ill. $(1,1)$ sorozatok, élei pedig $(0,0)(1,1)$ ill. $(0,1)(1,0)$. A G_5 gráf $(0,1,1,0,0)$ csúcsa össze van kötve a $(0,0,1,1,0)$ csúccsal, de nincs összekötve sem az $(1,1,1,0,0)$ sem pedig az $(1,1,0,0,1)$ csúccsal.)

1. Milyen $n \geq 4$ esetén létezik a G_n gráfnak Euler-köre?

   Ha egy G gráfnak van Euler-köre, akkor G (izolált pontoktól eltekintve) öf. (2 pont)
   A G_n gráfnak nincs izolált pontja. (1 pont)
   Éllel összekötött sorozatokban az egyesek számának különbsége 0 vagy 2. (3 pont)
   Ezért azonos komponensbeli sorozatokban az egyesek számának különbsége páros. (2 pont)
   Eszerint G_n nem összefüggő. (1 pont)
   Tehát G_n-nek semmilyen $n \geq 4$ esetén sincs Euler-köre. (1 pont)

   Valami azt súgja, ezt sokan el fogják rontani. Adjunk nekik is:

   G_n minden pontjának foka $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, (2 pont)
   ami pontosan akkor páros, ha $n(n-1)$ 4-gyel osztható, (1 pont)
   azaz $n = 4k$ vagy $n = 4k+1$ alakú. (2 pont)
   „Az is kell, hogy G_n öf legyen.” (Nem igaz, de örüljünk, ha jóra gondolnak.) (2 pont)

2. Igazoljuk, hogy a G_5 gráf $\overline{G_5}$ komplemenerének van 3 olyan Hamilton-köre, melyeknek páronként nincs közös élük.

   $\overline{G_5}$-nek annyi pontja van, ahány 5 hosszú 0/1 sorozat, (1 pont)
   amiből $2^5 = 32$ db van. (1 pont)
   G_5 minden pontjának foka $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2}$, (1 pont)
   ezért $\overline{G_5}$ minden pontjának foka $32 - 1 - 10 = 21$. (1 pont)
   $21 \geq \frac{32}{2} = 16$ miatt az Ore tétel szerint van G_5-nek egy C_1 Hamilton-köre (3 pont)
   A $G - C_1$ gráfban minden fokszám $21 - 2 = 19 \geq 16$, ezért $G - C_1$-nek is van egy (C_1-től diszjunkt) C_2 Hamilton-köre az Ore tétel szerint. (2 pont)
   Hasonlóan, $G - C_1 - C_2$ 17-reguláris, $17 \geq 16$, így Ore szerint van egy C_3 Hamilton-köre, mely C_1-től és C_2-től diszjunkt. (1 pont)

3. Van-e a G_n gráfnak teljes párosítása $n \geq 4$ esetén?

   Tekintsük G_n azon éleit, melyek két olyan sorozatot kötnek össze, melyek az első két helyen különböznek. (3 pont)
   Világos, hogy G_n minden csúcsából indul ki fenti tipusú él, (3 pont)
   és minden csúcsból pontosan egy ilyen él indul. (2 pont)
   A vizsgált élek tehát a G_n egy teljes párosítását alkotják, (1 pont)
   így a feladat kérdésére igen a válasz. (1 pont)

4. Határozzuk meg a G_3 gráf $\alpha(G_3), \omega(G_3), \rho(G_3), \nu(G_3), \chi(G_3)$ ill. $\tau(G_3)$ paramétereit.

   G_3 csúcsai megfelelnek egy kocka csúcsainak, az élek pedig a lapátlóknak. (A lerajzolásért is jár a 2 pont)
   G_3-nak mindkét komponense egy-egy tetraéder élhálója, azaz egy-egy K_4. (2 pont)
   A Gallai tételt (is) felhasználva $\alpha(G_3) = 2, \omega(G_3) = 4,\ \nu(G_3) = 4,\ \chi(G_3) = 4$ ill. $\tau(G_3) = 8 - \alpha(G_3) = 6$ és $\rho(G_3) = 8 - \nu(G_3) = 4$ (1+1+1+1+1+1 pont)

5. Igazoljuk, hogy ha egy legalább 4-pontú F fának van teljes párosítása, akkor F-nek van legalább két másodfokú csúcsa.

   Ha F teljes párosítása n-élű, akkor F-nek $2n \geq 4$ pontja van. (2 pont)
   Tehát F éleinek száma $2n - 1$, (2 pont)
   vagyis F-nek $n - 1 \geq 1$ olyan éle van, mely nincs benne a teljes párosításban. (2 pont)
   Ez az $n - 1$ él körmentes gráfot alkot, melynek minden komponense fa. (1 pont)
   Vegyünk egy nemtriviális fakomponenst: ennek van legalább két különböző levele (mondjuk u és v). (1 pont)
   u és v mindegyikéhez F-nek két éle csatlakozik: egy benne van a teljes párosításban, egy pedig nincs. (1 pont)
   Tehát u és v két különböző, másodfokú csúcsa F-nek. (1 pont)
   (Egyébként F egy leghosszabb útja végpontjainak szomszédai szintén másodfokúak.)

6. Mennyi $\chi'(L(K_{2,4}))$?

   $K_{2,4}$ negyedfokú csúcsaiból induló élek az $L(K_{2,4})$ élgráfban egy-egy klikket alkotnak, $K_{2,4}$ másodfokú csúcsai pedig teljes párosítást indukálnak a két K_4 között. (A lerajzolásért is jár a 2 pont)
   Tehát az élgráf minden pontjának fokszáma 4, így $\chi'(L(K_{2,4})) \geq 4$. (2 pont)
   4 szín azonban elegendő $L(K_{2,4})$ élszínezésére: a K_4-k közti teljes párosítás élei azonos színt kapnak (2 pont)
   A K_4 élei pedig 3-színezhetőek. (2 pont)
   Az alsó becsléssel összevetve $\chi(L(K_{2,4})) = 4$ adódik. (2 pont)

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a V ponthalmazon az E_1 és E_2 élhalmazok egy-egy páros gráfot határoznak meg, akkor a $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf 4-színezhető.

   Minden páros gráf 2-színezhető. (2 pont)
   Tekintsük a (V, E_1) ill. (V, E_2) páros gráfok egy-egy 2-színezését. (2 pont)
   Ezáltal V pontjait 2×2-féleképp színeztük, azaz megadtuk V pontjainak egy 4 színnel történő kiszínezését. (3 pont)
   Ez a színezés a G egy 4-színezése lesz, hisz minden E_1-beli él vegpontjai és minden E_2-beli él végpontjai is különböző színt kapnak. (3 pont)

8. Képezzük a H gráfot a $G = (A, B; E)$ páros gráfból úgy, hogy az A színosztályra egy klikket illesztünk, azaz az A-beli pontpárokat összekötjük. Bizonyítsuk be, hogy H perfekt.

   H minden feszített részgráfja úgy jön létre, hogy egy páros gráf egyik színosztályára klikket illesztünk, (1 pont)
   ezért H perfektségének igazolásához annyit kell bizonyítani, hogy minden, ilyen módon készített H' gráfra $\chi(H') = \omega(H')$. (1 pont)
   Legyen H' ilyen gráf, azaz a $G' = (A', B'; E')$ ps gráfban A' pontjait összekötözgettük. (1 pont)
   $|A'| \leq \omega(H') \leq |A'| + 1$, hisz A' klikk, és egy klikk B'-nek legfeljebb 1 pontját tartalmazhatja. (1 pont)
   Ha $\omega(H') = |A'| + 1$, akkor A' pontjait különböző színekkel színezve, és B' pontjainak egy újabb színt adva látjuk, hogy $\chi(H') \leq |A'| + 1 = \omega(H') \leq \chi(H')$, (2 pont)
   ha pedig $\omega(H') = |A'|$, akkor B' minden pontjához van olyan A'-beli pont, amivel nincs összekötve. (2 pont)
   Tehát ha A' pontjait különböző színekkel színezzük, akkor B' minden pontjához választható egy szín, azaz $\chi(H') \leq |A'| = \omega(H') \leq \chi(H')$. (1 pont)
   Következésképp $\chi(H') = \omega(H')$, azaz H csakugyan perfekt. (1 pont)